Nouvelles annales de mathématiques

Mourgues

Note sur les sommes de puissances semblables

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 10 (1851), p. 78-80

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1851_1_10__78_1>

NOTE SUR LES SOMMES DE PUISSANCES SEMBLABLES;

PAR M. MOURGUES,
Professeur à Marseille.

Soit P_n la somme des combinaisons n à n de m quantités $a, b, c \ldots h$; soit A_n la partie de ces combinaisons qui ne contient pas a, B_n celle qui ne contient pas $b \ldots.$

On sait d'abord que

$$(1) \qquad P_n = A_n + a A_{n-1}.$$

Je dis en second lieu que

$$(2) \qquad A_n + B_n + C_n \ldots + H_n = (m - n) P_n;$$

(*) On abrége beaucoup en faisant $AB = m$, $BA' = n$, $A'B' = p$, et écrivant $n(m+n+p) = mp$, $A\alpha = \frac{1}{2}(m+n)$, $A\beta = \frac{1}{2}(n+p)$.

car une combinaison quelconque $abc\ldots e$ n'entre pas dans les n parties A_n, B_n,..., E_n, et entre une seule fois dans chacune des $m-n$ autres.

Cela posé, de la formule (1) on déduit

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} P_n &= A_n + aA_{n-1},\\ P_{n-1} &= A_{n-1} + aA_{n-2},\\ &\vdots\\ P_1 &= A_1 + a. \end{aligned}\right.$$

Multipliant les membres de la première équation par $(-a)$, de la deuxième par $(+a^2)$, de la troisième par $(-a^3)$, etc., et sommant, il vient

$$(4)\qquad P_n - aP_{n-1} + a^2P_{n-2}\ldots \pm a^{n-1}P_1 \mp a^n = A_n.$$

De même

$$P_n - bP_{n-1} + b^2P_{n-2}\ldots \pm b^{n-1}P_1 \mp b^n = B_n;$$

d'où, par addition,

$$mP_n - S_1P_{n-1} + S_2P_{n-2}\ldots \pm S_{n-1}P_1 \mp S_n = A_n + B_n\ldots + H_n,$$

et, par suite, en vertu de l'équation (2),

$$(5)\qquad nP_n - S_1P_{n-2} + S_2P_{n-1}\ldots \mp S_{n-1}P_1 \pm S_n = 0.$$

C'est la formule qui donne, en fonction des combinaisons, les sommes de puissances semblables d'indices inférieurs à m.

En second lieu, pour $n=m$, la première des relations (3) se réduit à $P_m = aA_{m-1}$, et, par suite, l'égalité (4) devient

$$P_m - aP_{m-1} + a^2P_{m-2}\ldots \mp a^{m-1}P_1 \mp a^m = 0;$$

d'où, en multipliant les deux membres par a^r,

$$a^rP_m - a^{r+1}P_{m-1} + a^{r+2}P_{m-2}\ldots \pm a^{r+m-1}P_1 \mp a^{r+m} = 0.$$

Remplaçant a successivement par b, c,..., et sommant.

on a

$$(6) \qquad S_r P_m - S_{r+1} P_{m-1} \ldots \pm S_{r+m-1} P_1 \mp S_{m+r} = 0.$$

C'est la formule relative aux sommes d'indices non inférieurs à m.