NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

JULES VIEILLE

Sur les résultats de la substitution d'une suite de nombres équidistants dans une fonction entière d'une seule variable. Application à la séparation des racines d'une équation du troisième degré. Formules d'interpolation

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 10 (1851), p. 48-71

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1851_1_10__48_0>

Sur les résultats de la substitution d'une suite de nombres équidistants dans une fonction entière d'une seule variable. — Application à la séparation des racines d'une équation du troisième degré. — Formules d'interpolation (*);

PAR M. JULES VIEILLE.

1. Soit $y = f(x)$ une fonction quelconque de la variable x; si l'on y remplace x par $x + h$, la différence

$$f(x+h) - f(x)$$

se nomme *différence première* de la fonction y, et on la représente par Δy. Cette différence est elle-même une fonction de x (en général); et si l'on donne à la variable un nouvel accroissement égal à h, la différence première de Δy, ou

$$f(x+2h) - f(x+h) - [f(x+h) - f(x)],$$

se nomme *différence deuxième* de la fonction y; on la représente par $\Delta^2 y$.

De même la différence première de $\Delta^2 y$ est dite *différence troisième* de y ou $\Delta^3 y$; et ainsi de suite.

Il résulte de cette définition que la différence $m^{\text{ième}}$ de la différence $n^{\text{ième}}$ d'une fonction est la différence $(m+n)^{\text{ième}}$ de cette fonction

$$\Delta^m . \Delta^n y = \Delta^{m+n} y.$$

2. THÉORÈME. *La différence* $m^{\text{ième}}$ *d'une fonction en-*

(*) En rédigeant cette Note, nous n'avons eu d'autre but que de remplir une lacune des Traités élémentaires d'Algèbre, et de fournir la solution de plusieurs questions renfermées dans le nouveau Programme d'admission à l'École Polytechnique.

tière du degré m,

$$y = Ax^m + Bx^{m-1} + \ldots + Kx + L,$$

est constante, et égale à $1.2.3\ldots m\,A h^m$.

On a

$$\Delta y = A[(x+h)^m - x^m] + B[(x+h)^{m-1} - x^{m-1}] + \ldots.$$

Sans développer toutes ces puissances, il suffit de remarquer que Δy sera un polynôme du degré $m-1$ ayant pour premier terme $mAx^{m-1}h$, lequel se déduit *du premier terme de y, en multipliant* A *par l'exposant de x dans ce terme, diminuant l'exposant de x d'une unité, et augmentant celui de h d'une unité.* Il en résulte que $\Delta^2 y$ est un polynôme du degré $m-2$, ayant pour premier terme

$$m(m-1)Ax^{m-2}h^2;$$

$\Delta^3 y$ est du degré $m-3$ et a pour premier terme

$$m(m-1)(m-2)Ax^{m-3}h^3;$$

$\Delta^{m-1}y$ sera du premier degré en x, et son premier terme sera

$$m(m-1)\ldots 3.2\,Ax.h^{m-1};$$

enfin $\Delta^m y$ sera égal à une constante

$$\Delta^m y = 1.2\ldots m\,Ah^m. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Corollaire 1. Si $A=1$, $h=1$. La différence de l'ordre m se réduit à

$$1.2.3\ldots m.$$

Par exemple, si dans les fonctions du troisième degré

$$y = x^3 - 3x + 1,\quad y = x^3 - 67 - 7,\quad y = x^3 + ax^2 + bx + c,$$

on substitue des nombres entiers consécutifs, on aura constamment

$$\Delta^3 y = 1.2.3 = 6.$$

Corollaire 2. Soient $y_0, y_1, y_2, y_3, \ldots$ les différentes valeurs que reçoit une fonction entière de x, du degré m, quand on y remplace x par les nombres équidistants

$$x_0, \quad x_0 + h, \quad x_0 + 2h, \quad x_0 + 3h;$$

si l'on retranche chaque terme du suivant, on aura une suite de différences premières, généralement inégales,

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0, \quad \Delta y_1 = y_2 - y_1, \quad \Delta y_2 = y_3 - y_2 \ldots$$

Si l'on retranche ensuite chacune de ces différences de la suivante, on aura la suite des différences deuxièmes

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0, \quad \Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_2 \ldots$$

En continuant ainsi jusqu'à l'ordre m, on aura des différences $m^{\text{ièmes}}$ toutes égales entre elles et à la constante

$$1.2.3 \ldots m \, \mathrm{A} h^m.$$

Applications.

4. *Formation des puissances des nombres entiers consécutifs.*

Supposons qu'il s'agisse de calculer la suite des cubes des nombres entiers. Ici la fonction $y = x^3$; on calculera directement trois valeurs de y, c'est-à-dire *trois cubes consécutifs seulement,* et l'on choisira de préférence ceux des nombres 0, 1, 2; on conclut de ces trois cubes (0, 1, 8), les deux différences premières

$$\Delta(0^3) = 1, \quad \Delta(1^3) = 7,$$

puis de ces deux différences, la différence deuxième

$$\Delta^2(0^3) = 6;$$

quant à la différence troisième, elle est constante et égale à $1.2.3 = 6$. Cela posé, on formera, par additions successives de ce dernier nombre, la suite des différences deuxièmes, puis de celles-ci on passera, toujours par voie d'addition, à la suite des différences premières; enfin de ces dernières à la suite des cubes demandés.

Voici la disposition des calculs.

NOMBRES.	CUBES.	DIFFÉRENCES premières.	DIFFÉRENCES deuxièmes.	DIFFÉRENCES troisièmes.
0	0	1	6	6
1	1	7	12	»
2	8	19	18	»
3	27	37	24	»
4	64	61	30	»
5	125	91	36	»
6	216	127	42	»
7	343	169	48	»
8	512	217	54	»
9	729	271	60	»
»	»	»	»	»

Cette méthode est applicable avec avantage au calcul des puissances de tous les degrés des nombres entiers consécutifs; pour les puissances cinquièmes par exemple, on devrait d'abord former directement *cinq* puissances consécutives. On pourra choisir celles des nombres -2, -1, 0, 1, 2.

5. Étant donnée une fonction entière du $m^{ième}$ degré, il suffira de calculer directement les résultats de la substitution de m nombres entiers consécutifs, pour en déduire, au moyen des différences, ceux de tous les autres nombres entiers, positifs ou négatifs.

Soit, par exemple, la fonction du troisième degré

$$y = x^3 + 11x^2 - 102x + 181;$$

on partira des nombres -1, 0, $+1$.

$$x = -1 \quad \text{donne} \quad y_{-1} = +293,$$
$$x = 0 \quad \text{donne} \quad y_0 = +181,$$
$$x = +1 \quad \text{donne} \quad y_1 = +91;$$

on en conclut

$$\Delta(y_{-1}) = -112,$$
$$\Delta(y_0) = -90;$$

puis

$$\Delta^2(y_{-1}) = +22:$$

on a d'ailleurs

$$\Delta^3(y_{-1}) = 6.$$

Cela posé, pour avoir les résultats de la substitution des nombres entiers et positifs 2, 3, 4, 5, ..., on procédera, comme ci-dessus, par additions successives, en remontant des différences troisièmes aux différences deuxièmes, de celles-ci aux différences premières, enfin de ces dernières aux valeurs cherchées de la fonction.

Tableau des calculs.

$x =$	$y =$	Δ	Δ^2	Δ^3
-1	$+293$	-112	$+22$	6
0	$+181$	-90	$+28$	»
$+1$	$+91$	-62	$+34$	»
$+2$	$+29$	-28	$+40$	»
$+3$	$+1$	$+12$	$+46$	»
$+4$	$+13$	$+58$	$+52$	»
$+5$	$+71$	$+110$	$+58$	»
$+6$	$+181$	$+168$	$+64$	»

A partir de $x = 3$, il est évident, par ce tableau, que les résultats des substitutions seront constamment positifs et croissants; on aura les résultats de la substitution des nombres négatifs -2, -3, -4, -5, ..., en procédant par soustractions successives au lieu d'additions. En effet, on voit que, pour remonter d'une ligne horizontale du tableau ci-dessus à la ligne supérieure, par exemple de la ligne qui répond à $x = 4$ à celle qui répond à $x = 3$, il faut *retrancher* 6 de 52, ce qui donne

46, puis 46 de 58, ce qui donne 12, puis 12 de 13, ce qui donne 1. En suivant cette loi, on passera des nombres relatifs à — 1 à ceux relatifs à — 2, puis de ces derniers à ceux relatifs à — 3, et ainsi de suite. On trouve ainsi pour la fonction des valeurs positives, tant que x est supérieur à — 18. $x = -17$ donne $y = 181$, et $x = -18$ donne $y = -251$; à partir de — 18, si x continue à décroître, les résultats de la substitution seront constamment négatifs.

Application à la séparation des racines d'une équation du troisième degré.

6. Les calculs précédents n'ont manifesté qu'un seul changement de signe pour la fonction y, et ce changement a lieu lorsque la variable x passe de — 17 à — 18. Il en résulte que l'équation

$$(1) \qquad x^3 + 11x^2 - 102x + 181 = 0\ (*)$$

a une racine négative comprise entre — 17 et — 18; elle ne peut d'ailleurs avoir qu'une seule racine négative, puisque la transformée en $(-x)$ n'offre qu'une variation.

[On aurait pu, sans passer par toutes les substitutions précédentes, déterminer plus simplement les deux nombres entiers entre lesquels est comprise la racine négative, en remarquant que le premier membre de l'équation peut s'écrire

$$x(x-6)(x+17)+181,$$

et cette forme manifeste le changement de signe unique qui a lieu de $x = -17$ à $x = -18$].

Outre la racine réelle négative que nous venons de sé-

(*) Cette équation est celle à laquelle M. Sturm a appliqué son théorème : nous la choisissons, afin que l'on puisse plus commodément comparer les deux modes de calculs.

parer, l'équation (1) *peut* admettre deux racines réelles positives. Mais nos calculs ne nous fournissent aucune conclusion sur l'existence de ces racines. Nous pouvons seulement dire que, *si elles existent,* elles sont comprises toutes deux entre deux nombres entiers consécutifs; et comme la substitution de $x = 3$ a donné pour résultat 1, nombre beaucoup plus petit que ceux fournis par les substitutions qui précèdent et qui suivent, on serait conduit à chercher les deux racines entre 2 et 3 ou entre 3 et 4.

Il ne faudrait pas dire que 3 *est une limite supérieure des racines positives, en se fondant sur ce que, à partir de* $x = 3$, *le tableau des différences fait voir que les résultats des substitutions seront toujours positifs et croissants.*

En effet, de ce que les nombres *entiers* 3, 4, 5,..., font prendre à la fonction $(x^3 + 11x^2 - 102x + 181)$ des valeurs croissantes, il n'en résulte pas que la fonction ne puisse décroître et passer par zéro *pour des valeurs de x comprises entre deux d'entre eux*. La représentation graphique des valeurs de la fonction ne laisse aucun doute sur la fausseté de cette conclusion. La courbe dont ces valeurs sont les ordonnées, peut couper l'axe des x en deux points dont les abscisses sont comprises entre deux nombres entiers consécutifs, et l'on remarquera qu'entre ces abscisses tombe celle d'un point de la courbe dont l'ordonnée, abstraction faite du signe, est un maximum. L'abscisse de ce point satisfait à l'équation

$$f'(x) = 0,$$

$f'(x)$ désignant la dérivée de la fonction proposée, c'est-à-dire que *les deux racines positives de l'équation* (1), *si elles existent, sont séparées par une racine de l'équation qu'on obtient en égalant à zéro la dérivée* *de son premier membre* [cas particulier du théorème de Rolle (*)].

7. Le plus souvent, dans les applications où l'on est conduit à résoudre une équation numérique du troisième degré, on sait d'*avance* si l'équation comporte *une* ou *trois* racines réelles. La considération de l'*équation dérivée* suffit alors pour séparer rigoureusement les racines de l'équation. Elle supplée avec avantage (pour le troisième degré) à la méthode de M. Sturm; sans elle, et en se bornant à la substitution de nombres équidistants, on s'expose à faire des tâtonnements inutiles.

Dans le cas qui nous occupe, l'équation dérivée est

$$3x^2 + 22x - 102 = 0,$$

et sa racine positive est

$$\frac{-11 + \sqrt{427}}{3} = 3,221\ldots$$

Donc, si l'on admet que l'équation (1) ait deux racines positives, l'une sera plus grande que 3,2, et l'autre plus petite que 3,3; et comme on sait déjà qu'elles sont comprises entre deux nombres entiers consécutifs, c'est entre 3 et 4 qu'il faut les chercher.

8. Pour les séparer, nous allons substituer dans la fonction y des nombres équidistants de $\frac{1}{10}$ entre 3 et 4. En procédant ainsi, nous aurons l'avantage d'obtenir la valeur approchée de chaque racine à moins de $\frac{1}{10}$.

Il convient de continuer la méthode de calcul par différences, qui est plus expéditive et plus sûre que toute

(*) Ce théorème s'énonce ainsi : *Deux racines réelles et inégales d'une équation comprennent un nombre impair de racines réelles de l'équation dérivée.*

autre. A cet effet, nous emprunterons au tableau du n° 6 les nombres et différences relatives à $x = 3$,

$$y_3 = 1, \quad \Delta = 12, \quad \Delta^2 = 46, \quad \Delta^3 = 6,$$

et il s'agit de déduire de ces trois différences relatives à l'accroissement constant 1, les trois différences du même nombre y_3, relatives au nouvel accroissement constant $\frac{1}{10}$. Or, si l'on désigne en général par δ, δ^2, δ^3 les différences première, deuxième, troisième d'une valeur quelconque de la fonction y relatives à un accroissement constant h, et par Δ, Δ^2, Δ^3 les trois différences de la *même valeur* de y relatives à l'accroissement 1, on a les formules

$$(2) \qquad \begin{cases} \delta^3 = h^3 \Delta^3, \\ \delta^2 = h^2 [\Delta^2 + (h-1)\Delta^3], \\ \delta = h\left[\Delta + \dfrac{h-1}{2}\Delta^2 + \dfrac{(h-1)(h-2)}{6}\Delta^3\right]: \end{cases}$$

elles seront démontrées plus loin, afin de ne pas interrompre le calcul. Nous nous bornerons à remarquer que la première est une conséquence évidente de la formule générale

$$\delta^m y = 1.2.3\ldots m.h^m.$$

En faisant $h = \frac{1}{10}$ dans les formules précédentes, on a

$$(3) \qquad \begin{cases} \delta^3 = \dfrac{\Delta^3}{1000}, \\ \delta^2 = \dfrac{\Delta^2}{100} - \dfrac{9\,\Delta^3}{1000}, \\ \delta = \dfrac{\Delta}{10} - \dfrac{9\,\Delta^2}{200} + \dfrac{171.\Delta^3}{6000}; \end{cases}$$

et remplaçant Δ par 12, Δ^2 par 46, Δ^3 par 6, on a

$$\delta^3 = 0{,}006, \quad \delta^2 = +\,0{,}406, \quad \delta = -\,0{,}699.$$

Actuellement, la disposition des calculs s'explique d'elle-même ; ils sont consignés dans le tableau suivant.

Substitution de nombres équidistants de $\frac{1}{10}$ entre 3 et 4.

$x =$	$y =$	δ	δ^2	δ^3
3	+ 1	— 0,699	+ 0,406	0,006
3,1	+ 0,301	— 0,293	+ 0,412	»
3,2	+ 0,008	+ 0,119	+ 0,418	»
3,3	+ 0,127	+ 0,537	+ 0,424	»
3,4	+ 0,664	+ 0,961	+ 0,430	»
3,5	+ 1,625	+ 1,391	+ 0,436	»
3,6	+ 3,016	+ 1,827	+ 0,442	»
3,7	+ 4,843	+ 2,269	+ 0,448	»
3,8	+ 7,112	+ 2,717	+ 0,454	»
3,9	+ 9,829	+ 3,171	+ 0,460	»
4	+13.000	+ 3,631	+ 0,466	»

Comme vérification, on retrouve pour $x = 3 + \frac{10}{10}$ ou 4, le résultat 13 déjà connu. Si nous n'avions pas tenu à donner un exemple complet de ce genre de calculs, et à user du moyen de contrôle qui vient d'être indiqué, nous aurions pu nous dispenser, dans la question présente, de pousser les substitutions aussi loin : la séparation des racines n'exige pas qu'on aille au delà de 3,2; en effet, jusqu'à cette valeur de x, on n'a trouvé pour y que des valeurs positives; et comme la différence δ est devenue positive, on voit que la substitution de 3,3 devra donner également un résultat positif. Or on sait, par la considération de la dérivée, que l'une des racines cherchées est plus petite que 3,3, et l'autre plus grande que 3,2; donc il est certain qu'elles sont toutes deux comprises entre 3,2 et 3,3.

Il faut, pour poursuivre leur séparation, substituer des nombres équidistants de $\frac{1}{100}$ entre 3,20 et 3,30. A cet effet, remarquons que les formules (2) établissent des relations générales entre deux systèmes de différences (δ, δ^2, δ^3), (Δ, Δ^2, Δ^3) correspondantes à des accroissements dont le rapport est h; et comme le rapport de $\frac{1}{100}$ à $\frac{1}{10}$ est égal à celui de $\frac{1}{10}$ à 1, on comprend que les mêmes formules (3) fourniront les valeurs des nouvelles différences δ, δ^2, δ^3 relatives à l'accroissement constant $\frac{1}{100}$, en y remplaçant Δ, Δ^2, Δ^3 par leurs valeurs correspondantes à l'accroissement $\frac{1}{10}$.

Comme on doit partir de 3,20, on fera, dans les formules (3),

$$\Delta = 0{,}119, \quad \Delta^2 = 0{,}418, \quad \Delta^3 = 0{,}006,$$

et l'on aura

$$\delta = -0{,}006739, \quad \delta^2 = 0{,}004126, \quad \delta^3 = 0{,}000006.$$

Substitution de nombres équidistants de $\frac{1}{100}$ *entre* 3,20 *et* 3,30.

x	y	δ	δ^2	δ^3
3,20	+ 0,008	— 0,006739	0,004126	0,000006
3,21	+ 0,001261	— 0,002613	0,004132	»
3,22	— 0,001352	+ 0,001519	»	»
3,23	+ 0,000167	»	»	»

On trouve deux changements de signes, l'un de 3,21 à 3,22, l'autre de 3,22 à 3,23. Les deux racines positives de l'équation (1) sont donc séparées, et leurs valeurs approchées à moins de $\frac{1}{100}$ sont

$$3{,}21 \quad \text{et} \quad 3{,}22.$$

On pourra maintenant en approcher davantage par la méthode de Newton.

Quant à la racine négative comprise entre -17 et -18, on la calculera à moins de $\frac{1}{10}$, en substituant des nombres équidistants de $\frac{1}{10}$; puis on poursuivra l'approximation par la méthode de Newton.

9. Au reste, si l'on continue l'approximation par le calcul des différences en substituant successivement des nombres équidistants de $\frac{1}{100}$, de $\frac{1}{1000}$, de $\frac{1}{10000}\cdots$; on voit par les formules (3) que la valeur numérique de la différence première δ tendra à se réduire à $\frac{\Delta}{10}$, les autres termes $\frac{9\Delta^2}{200}$ et $\frac{171\Delta^3}{6000}$ n'ayant bientôt qu'une influence négligeable sur cette valeur. Quand le calcul aura été conduit jusqu'à ce degré où δ est sensiblement égale à $\frac{\Delta}{10}$, on pourra achever l'approximation de la racine par une simple proportion, comme on le fait dans le calcul du nombre correspondant à un logarithme. En effet, soient $f(x)$ le premier membre de l'équation, a et $a+\frac{1}{10^n}$ deux nombres entre lesquels tombe la racine cherchée; $f(a)$ et $f\left(a+\frac{1}{10^n}\right)$ sont de signes contraires. Soit, pour fixer les idées, $f(a) < 0$, Δ la différence

$$f\left(a+\frac{1}{10^n}\right)-f(a),$$

δ la différence

$$f\left(a + \frac{1}{10^{n+1}}\right) - f(a),$$

on a $\delta = \frac{\Delta}{10}$ à peu près.

Puisque, l'accroissement de la variable étant réduit au dixième, l'accroissement correspondant de la fonction est pareillement réduit au dixième, on peut poser cette règle de trois :

Pour un accroissement Δ de $f(a)$, il a fallu ajouter à a, 10 unités $\left(\text{de l'ordre } \frac{1}{10^{n+1}}\right)$; combien, pour obtenir un accroissement $-f(a)$ (qui réduira la fonction à zéro), faudra-t-il ajouter d'unités, du même ordre ?

$$\Delta : -f(a) :: 10 : z, \quad \text{d'où} \quad z = \frac{-10f(a)}{\Delta}.$$

$a + \frac{z}{10^{n+1}}$ sera une valeur très-approchée de la racine cherchée. Si les nombres Δ et $-f(a)$ qu'il faut supposer réduits en unités du dernier ordre, sont exacts chacun à moins d'une demi-unité, l'erreur du quotient qui fournit z aura pour limite supérieure $\frac{1}{\left(\frac{\Delta}{10}\right)}$.

10. *Démonstration des formules* (2) *du* n° 8.

Ces formules sont comprises dans le problème général de l'interpolation, qui sera résolu plus loin. Mais on peut en donner une démonstration directe et assez simple dans le cas d'une fonction du troisième degré.

Soit y_0 la valeur que prend une fonction du troisième degré pour une valeur x_0 de x; la fonction sera de la forme

$$y = y_0 + a(x - x_0) + b(x - x_0)^2 + c(x - x_0)^3,$$

ou mieux, si l'on pose $x = x_0 + X$,

$$(1) \qquad y = y_0 + aX + bX^2 + cX^3.$$

Cette substitution de la variable X à x revient, en géométrie analytique, où l'on regarde y comme l'ordonnée d'une courbe, à transporter l'origine au point de l'axe des x qui a pour abscisse x_0.

D'après cela, au lieu d'attribuer à x les valeurs

$$x_0, \quad x_0 + h, \quad x_0 + 2h, \quad x_0 + 3h \ldots,$$

il sera équivalent et plus simple d'attribuer à X les valeurs

$$0, \; h, \; 2h, \; 3h.$$

Soient δ, δ^2, δ^3 les différences première, deuxième et troisième de y_0; on aura, en opérant les substitutions et soustractions indiquées,

$$\delta = ah + bh^2 + ch^3,$$
$$\delta^2 = 2bh^2 + 6ch^3,$$
$$\delta^3 = 6ch^3.$$

Soient Δ, Δ^2, Δ^3 les valeurs que prennent les trois différences de y_0, pour un accroissement constant 1 donné à la variable; on fera $h = 1$ dans les expressions précédentes, et l'on aura

$$\Delta = a + b + c,$$
$$\Delta^2 = 2b + 6c,$$
$$\Delta^3 = 6c.$$

Pour avoir les relations cherchées entre les δ et Δ, il ne reste plus qu'à éliminer a, b, c entre ces six équations; on tire des trois dernières

$$c = \frac{\Delta^3}{6}, \quad b = \frac{\Delta^2 - \Delta^3}{2}, \quad a = \left(\Delta - \frac{1}{2}\Delta^2 + \frac{\Delta^3}{3}\right),$$

et, en substituant dans les trois premières, on a les formules (2).

La même marche est applicable à une fonction d'un degré supérieur au troisième, mais les calculs d'élimination se compliqueraient de plus en plus.

11. Si l'on substitue les valeurs trouvées pour les coefficients a, b, c, dans l'équation (1), on aura

$$y = y_0 + \left(\Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3}\right) X + \frac{\Delta^2 - \Delta^3}{2} X^2 + \frac{\Delta^3}{6} X^3.$$

Ainsi une fonction du troisième degré est complétement déterminée, quand on connaît *une valeur* y_0 de la fonction correspondante à une valeur donnée de x, ainsi que les trois différences Δ, Δ^2, Δ^3 de y_0 relatives à l'accroissement constant 1 donné à la variable : cette proposition sera généralisée (n° 16).

Des différences envisagées sous un point de vue plus général. Expression de la différence $n^{ième}$ $(\Delta^n y_0)$ au moyen des $n+1$ valeurs $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$.

12. Si l'on considère une suite de valeurs $y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots$, que prend une fonction quelconque de x, quand la variable reçoit une suite de valeurs x_0, x_1, x_2, $x_3, \ldots$ (équidistantes ou non), et qu'on retranche chacune de la suivante, on a

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0, \quad \Delta y_1 = y_2 - y_1, \quad \Delta y_2 = y_3 - y_2, \ldots,$$

on en tire

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = (y_2 - y_1) - (y_1 - y_0);$$

et réduisant

$$\Delta^2 y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0,$$

de même

$$\Delta^2 y_1 = y_3 - 2y_2 + y_1,$$

et, par suite,

$$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = (y_3 - 2y_2 + y_1) - (y_2 - 2y_1 + y_0);$$

et réduisant

$$\Delta^3 y_0 = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0.$$

L'observation des différences des trois premiers ordres de y_0 conduit à cette loi : les indices décroissent successivement d'une unité depuis l'ordre de la différence jusqu'à zéro ; les coefficients sont ceux de la puissance du même ordre du binôme $(y - 1)$.

Si l'on suppose cette loi vraie pour la différence $n^{ième}$, on fera voir aisément qu'elle est encore vraie pour la différence $(n+1)^{ième}$; on trouvera, en effet, que chaque coefficient de Δ^{n+1} est égal au coefficient du terme de même rang dans Δ^n, ajouté au coefficient du terme précédent. Or c'est précisément ainsi que l'on passe de $(y-1)^n$ à $(y-1)^{n+1}$. On a donc, quel que soit n,

$$(4) \qquad \Delta^n y_0 = y_n - n y_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} y_{n-2} - \ldots \pm y_0.$$

Expression de y_n au moyen de y_0 et de ses n différences $\Delta y_0, \Delta^2 y_0, \ldots, \Delta^n y_0$.

13. Cette question est la réciproque de la précédente. On a successivement

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + \Delta y_0, \\ y_2 &= y_1 + \Delta y_1 = y_0 + \Delta y_0 + \Delta(y_0 + \Delta y_0) \\ &= y_0 + \Delta y_0 + \Delta y_0 + \Delta^2 y_0, \end{aligned}$$

car il est visible que la différence d'une somme de quantités est égale à la somme des différences de ces quantités ; on a donc en réduisant

$$y_2 = y_0 + 2\Delta y_0 + \Delta^2 y_0,$$
$$y_3 = y_2 + \Delta y_2 = (y_0 + 2\Delta y_0 + \Delta^2 y_0) + \Delta(y_0 + 2\Delta y_0 + \Delta^2 y_0),$$

et réduisant

$$y_3 = y_0 + 3\Delta y_0 + 3\Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0.$$

On voit que les indices des différences vont en croissant d'une unité depuis zéro jusqu'à l'indice de la valeur de y, et les coefficients sont ceux de la puissance du même degré du binôme $(y+1)$.

On fera voir, en supposant la loi vraie pour y_n, et en passant de y_n à y_{n+1}, comme on est passé de y_2 à y_3, que cette loi est générale.

On a donc, quel que soit n,

$$(5)\qquad y_n = y_0 + n\Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 y_0 + \ldots + \Delta^n y_0.$$

Formules d'interpolation.

14. Une grandeur est dite *fonction* d'une autre lorsque, en faisant varier la seconde, il en résulte une variation déterminée pour la première. Ainsi, la surface d'un cercle est une *fonction* du rayon, l'espace parcouru par un corps qui tombe est une *fonction* du temps écoulé depuis le commencement de la chute, la tangente trigonométrique d'un arc est une *fonction* de l'arc, la tension maximum de la vapeur d'eau est une *fonction* de la température, etc. Il arrive souvent que la relation qui existe entre une *fonction* et *la variable* dont elle dépend n'est pas de nature à pouvoir être exprimée par une équation exacte, algébrique ou transcendante, ou bien (et cela revient au même dans la pratique) cette équation est trop compliquée pour qu'on puisse en déduire commodément toutes les valeurs de la fonction.

Alors si l'on connaît (par l'observation ou de toute autre manière) un certain nombre de valeurs de la fonction correspondante à des valeurs données de la variable, on peut se proposer de déterminer, avec une approximation suffisante, celles qui correspondent à des valeurs intermédiaires de la variable : tel est le but de l'*interpolation*.

Interpoler, c'est déterminer, entre certaines limites de la variable x, une fonction de x d'après la connaissance d'un certain nombre de valeurs particulières de cette fonction comprises entre ces limites.

Quand on n'a d'avance aucune donnée sur l'expression analytique de la fonction, le problème est évidemment indéterminé; car la fonction peut être considérée comme l'ordonnée d'une courbe dont x serait l'abscisse, et l'interpolation revient à déterminer la courbe d'après un certain nombre de points par lesquels elle doit passer. Or il existe une infinité de courbes ayant n points communs.

On conçoit cependant que si une étude préalable de la fonction dont il s'agit a fait voir qu'elle ne varie pas trop brusquement dans l'intervalle des valeurs de x que l'on considère, et si ces valeurs ne sont pas trop distantes les unes des autres, il sera possible d'estimer, avec une assez grande approximation, la figure de la courbe dans la partie correspondante de son cours.

15. L'indétermination du problème cesse complétement si, à la connaissance de $n+1$ valeurs particulières de la fonction, on ajoute cette condition, *que la fonction soit entière et du degré n*. En effet, s'il était possible que deux fonctions du même degré n

$$a + bx + cx^2 + \ldots + kx^{n-1} + lx^n,$$
$$a' + b'x + c'x^2 + \ldots + k'x^{n-1} + l'x^n,$$

non identiques, eussent $n+1$ valeurs égales pour les mêmes valeurs de x,

$$x_0, \quad x_1, \quad x_2, \ldots, \quad x_n,$$

l'équation qu'on formerait en égalant à zéro la différence de ces fonctions, c'est-à-dire

$$(l - l')x^n + (k - k')x^{n-1} + \ldots + (b - b')x + a - a' = 0,$$

aurait $n+1$ racines

$$x = x_0, \quad x_1, \quad x_2, \ldots, \quad x_n,$$

ce qui est absurde, cette équation étant d'un degré au plus égal à n.

Ainsi, quelque procédé qu'on emploie pour le calcul des coefficients a, b, c,..., l d'une fonction entière de degré n remplissant les conditions données, on devra toujours parvenir aux mêmes résultats.

16. Nous nous bornerons à exposer la formule de Newton, qui répond au cas le plus ordinaire, celui où les $n+1$ valeurs de x sont supposées équidistantes. On peut, comme on l'a vu n° 10, partir de zéro comme première valeur de x, puisque cela revient à disposer de l'origine des x qui est arbitraire; soient donc

$$0,\quad h,\quad 2h,\ldots,\quad nh,$$

les $n+1$ valeurs de x, et

$$y_0,\quad y_1,\quad y_2,\ldots,\quad y_n,$$

les valeurs correspondantes de la fonction y.

On sait (n° 13) exprimer y_1, y_2,..., y_n, en fonction de y_0 et de ses différences successives. Si on les désigne, pour abréger, par δ, δ^2, δ^3,..., δ^n; et si l'on désigne par t un nombre entier qui peut recevoir toutes les valeurs de 0 à n inclusivement, je dis qu'on aura

$$(6)\qquad \left\{ \begin{aligned} y_t = y_0 + t\delta + \frac{t(t-1)}{1.2}\delta^2 + \ldots \\ + \frac{t(t-1)\ldots(t-n+1)}{1\ 2\ldots n}\delta^n. \end{aligned} \right.$$

En effet, pour $t=n$, cette équation coïncide avec la formule (5), et si t est plus petit que n, le second membre se termine de lui-même au terme $\frac{t(t-1)\ldots(t-t+1)}{1.2,\ldots t}\delta^t$; les coefficients des termes suivants étant nuls à cause du facteur $(t-t)$ qu'ils renferment.

Cela posé, si l'on change dans ce second membre t en $\frac{x}{h}$, il deviendra un polynôme entier en x du degré n.

$$y_0+\frac{x}{h}\delta+\frac{x}{h}\left(\frac{x}{h}-1\right)\frac{\delta^2}{1.2}+\frac{x}{h}\left(\frac{x}{h}-1\right)\left(\frac{x}{h}-2\right)\frac{\delta^3}{1.2.3}+\ldots$$
$$+\frac{x}{h}\left(\frac{x}{h}-1\right)\left(\frac{x}{h}-2\right)\ldots\left(\frac{x}{h}-n+1\right)\frac{\delta^n}{1.2\ldots n},$$

qui se réduira évidemment à y_t pour $x=th$, et, par conséquent, ce polynôme prendra successivement les valeurs

$$y_0,\quad y_1,\quad y_2,\ldots,\ y_n,$$

quand on y donnera à x les valeurs

$$0,\quad h,\quad 2h,\ldots,\ nh,$$

ce qu'il est, du reste, facile de vérifier. Ce polynôme n'est donc autre que la fonction y qu'il s'agissait d'obtenir, (n° 15), et l'on a définitivement

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} y=y_0+\frac{x}{h}\delta+\frac{x}{h}\left(\frac{x}{h}-1\right)\frac{\delta^2}{1.2}+\ldots\\ +\frac{x}{h}\left(\frac{x}{h}-1\right)\ldots\left(\frac{x}{h}-n+1\right)\frac{\delta^n}{1.2\ldots n}.\end{aligned}\right.$$

Cette formule a l'inconvénient (qui lui est commun, du reste, avec les autres formules d'interpolation), de n'être pas ordonnée par rapport aux puissances de x, en sorte que pour avoir les coefficients a, b, c,..., l de ces diverses puissances, il faudra développer les produits indiqués.

Application au troisième degré. — L'équation (7), ordonnée par rapport à x, se réduit à

$$y=y_0+\left(\delta-\frac{\delta^2}{2}+\frac{\delta^3}{3}\right)\frac{x}{h}+\frac{\delta^2-\delta^3}{2}\left(\frac{x}{h}\right)^2+\frac{\delta^3}{6}\left(\frac{x}{h}\right)^3.$$

Si l'on suppose $h=1$, et qu'on désigne par Δ, Δ', Δ^2, les différences de y_0, relatives à l'accroissement constant 1, l'équation précédente devient

$$y = y_0 + \left(\Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3}\right) x + \frac{\Delta^2 - \Delta^3}{2} x^2 + \frac{\Delta^3}{6} x^3;$$

c'est le développement de y, déjà donné au n° 11.

Puisque les seconds membres de ces deux équations sont les développements d'une même fonction entière de x, ils doivent être identiques. En égalant les coefficients des mêmes puissances de x, on retrouve les formules (2) du n° 8. Cette marche conduira immédiatement aux formules analogues pour une fonction d'un degré supérieur au troisième.

17. L'équation (7) permettra de remplacer par une équation algébrique une équation transcendante $X = 0$, lorsqu'on connaîtra $(n+1)$ valeurs de la fonction X, correspondantes à des valeurs de x, équidistantes et assez voisines pour que les différences $n^{\text{ièmes}}$ des résultats de leur substitution puissent être considérées comme constantes. Au point de vue de la géométrie analytique, cette interpolation a pour effet de remplacer la courbe transcendante $y = X$, par la courbe *parabolique*

$$y = y_0 + \frac{x}{h}\delta + \frac{x}{h}\left(\frac{x}{h} - 1\right)\frac{\delta^2}{1.2} + \ldots,$$

qui se confondra sensiblement avec la première, dans toute la partie de son cours, comprise entre les abscisses extrêmes 0 et nh.

L'emploi des parties proportionnelles dans les Tables de logarithmes est une véritable interpolation.

Comme les différences premières entre les termes consécutifs des Tables, varient très-lentement, on peut les regarder comme constantes dans un certain intervalle, c'est-à-dire regarder comme nulles les différences secondes, troisièmes, etc. Par exemple, si l'on ouvre les Tables trigonométriques au logarithme de tang ($34^\circ\,11'\,10''$), on trouve que la différence entre ce logarithme et celui de tang ($34^\circ\,11'\,20''$) est 453 dix-millioniêmes, et l'on voit que cette différence se maintient la même pour les accroissements successifs de $10''$ en $10''$, *jusqu'au dixième terme* $34^\circ\,12'\,50''$, où elle devient 452; puis elle reprend sa première valeur 453 pour les trois termes suivants, et elle oscille ainsi longtemps entre 453 et 452 dix-millioniêmes.

La même constance s'observe lorsqu'on remonte dans la Table *jusqu'au trentième terme* au-dessus de l'arc $34^\circ\,11'\,10''$. On peut donc regarder la fonction $\log \operatorname{tang} x$, comme se confondant sensiblement pour les valeurs de x, comprises entre ces limites avec une fonction entière dont la différence première δ serait égale au nombre constant 453 dix-millioniêmes, c'est-à-dire avec la fonction

$$(8) \qquad y = y_0 + \frac{x}{h}\delta,$$

qu'on déduit de l'équation (7) en faisant

$$\delta^2 = 0, \quad \delta^3 = 0 \ldots;$$

on en tire

$$\frac{y - y_0}{\delta} = \frac{x}{h},$$

c'est-à-dire les accroissements des logarithmes-tangentes proportionnels aux accroissements de l'arc, comme le suppose la règle usuelle.

Soient donc

$$y_0 = \log \operatorname{tang}(34^\circ\,11'\,10'') = 9{,}8320264,$$
$$h = 10'',$$
$$\delta = 453 \text{ dix-millioniêmes},$$

et soit proposé de trouver le logarithme de

$$\operatorname{tang}(34^\circ\,11'\,17'',8);$$

on fera, dans l'équation (8),

$$x = 7'',8,$$

et l'on aura pour la différence du logarithme cherché au logarithme de tang (34° 11′ 10″), différence évaluée en dix-millioniêmes,

$$y - y_0 = \frac{453 \times 7,8}{10} = 353,3.$$

Réciproquement, quand on se propose de trouver l'arc correspondant à un logarithme-tangente, y est donné, et l'inconnue est x. On tire de l'équation (8)

$$x = \frac{y - y_0}{\delta} h.$$

On fera $h = 10$, et le second membre indiquera le nombre x de secondes, qu'il faut ajouter à l'arc correspondant à y_0 ; c'est le résultat que donne la règle des parties proportionnelles.

Comme les deux termes de la division $(y - y_0)$ et δ ne sont connus qu'à $\frac{1}{2}$ unité près, et qu'on doit multiplier par 10, le quotient sera approché à moins de $\frac{1}{\left(\frac{\delta}{10}\right)}$ près. Par exemple, avec les nombres employés plus haut, on a $\delta = 453$; l'erreur sera moindre que $\frac{1''}{45}$, abstraction faite de l'erreur (beaucoup plus faible) apportée par la formule d'interpolation.

Comme les différences δ des tangentes sont les sommes des différences correspondantes des sinus et cosinus, il résulte de la limite d'erreur indiquée ci-dessus, que les formules qui donnent les angles par le moyen de la tangente, fournissent une approximation plus grande que les formules où l'angle est défini par son sinus ou son cosinus. C'est pourquoi les premières doivent toujours être préférées.

Note. L'excellent article qui précède est très-utile à l'enseignement. C'est un point détaché du calcul aux différences. Il serait avantageux, facile, d'apprendre aux élèves les principes de ce calcul; conséquences immédiates du binôme de Newton, et à l'aide desquelles on passe si naturellement au calcul différentiel, comme Euler le fait voir. Car les chaires doivent toujours retentir de ces méthodes générales tant recommandées dans les leçons à la première École Normale et professées par les grands maîtres, et que l'École Normale actuelle conserve et conservera (*utinam!*) religieusement. Ces méthodes sont diamétralement opposées à l'esprit de petitesse qu'on veut inoculer à certain enseignement en *haut lieu*.

O. TERQUEM.