NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

STURM

Sur le mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 10 (1851), p. 419-432

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1851_1_10__419_1>

SUR LE MOUVEMENT D'UN CORPS SOLIDE AUTOUR D'UN POINT FIXE;

PAR M. STURM.

On doit à M. Poinsot une nouvelle théorie fort ingénieuse de la rotation des corps, aujourd'hui bien connue et appréciée des géomètres. Toutefois l'ancienne méthode analytique est encore en usage, précisément parce qu'elle exige moins de raisonnement. Il peut donc être utile de simplifier la partie essentielle de cette analyse, qui est la formation des équations d'Euler, d'où l'on déduit ensuite

27.

toutes les circonstances du mouvement et même les propriétés nouvelles découvertes par M. Poinsot.

Considérons d'abord en lui-même, et indépendamment des forces qui le produisent, le mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe. En adoptant les notations de la *Mécanique* de Poisson, soit O le point fixe, soient x, y, z les coordonnées d'un point quelconque m du corps rapporté à trois axes fixes rectangulaires passant par le point O, et $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ les coordonnées du même point m rapporté à un autre système d'axes rectangulaires liés au corps et tournant avec lui autour du point O. Ces derniers axes seront dans la suite les axes d'inertie principaux du corps pour le point O. On a les formules

$$(1)\qquad \begin{cases} x = ax_{,} + by_{,} + cz_{,}, \\ y = a'x_{,} + b'y_{,} + c'z_{,}, \\ z = a''y_{,} + b''y_{,} + c''z_{,}, \end{cases}$$

les cosinus a, b, c, etc., étant liés par les relations connues

$$(2)\qquad \begin{cases} a^2 + a'^2 + a''^2 = 1, & ab + a'b' + a''b'' = 0, \\ b^2 + b'^2 + b''^2 = 1, & ac + a'c' + a''c'' = 0, \\ c^2 + c'^2 + c''^2 = 1, & bc + b'c' + b''c'' = 0, \end{cases}$$

qui en entraînent d'autres équivalentes

$$(3)\qquad a^2 + b^2 + c^2 = 1, \qquad aa' + bb' + cc' = 0, \text{ etc.}$$

Les composantes de la vitesse v du point m parallèles aux axes fixes Ox, Oy, Oz, ou les projections de cette vitesse sur les axes sont

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x_{,}\dfrac{da}{dt} + y_{,}\dfrac{db}{dt} + z_{,}\dfrac{dc}{dt}, \\ \dfrac{dy}{dt} = x_{,}\dfrac{da'}{dt} + y_{,}\dfrac{db'}{dt} + z_{,}\dfrac{dc'}{dt}, \\ \dfrac{dz}{dt} = x_{,}\dfrac{da''}{dt} + y_{,}\dfrac{db''}{dt} + z_{,}\dfrac{dc''}{dt}. \end{cases}$$

Comme les axes fixes sont arbitraires, il nous est permis de supposer que leur position soit celle qu'occupe le système mobile des axes $Ox_{,}$, $Oy_{,}$, $Oz_{,}$ au bout du temps t, position dont ce dernier système s'écartera après le temps t. Alors $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ deviennent les composantes $u_{,}$, $v_{,}$, $w_{,}$ de la vitesse v parallèles aux axes $Ox_{,}$, $Oy_{,}$, $Oz_{,}$, au bout du temps t, pourvu qu'on prenne les valeurs de $\frac{da}{dt}$, $\frac{db}{dt}$, etc., dans cette hypothèse. Or les relations (2) donnent, quels que soient les axes fixes,

$$\begin{gathered}
ada + a'da' + a''da'' = 0, \\
bdb + b'db' + b''db'' = 0, \\
cdc + c'dc' + c''dc'' = 0, \\
adb + a'db' + a''db'' + bda + b'da' + b''da'' = 0, \\
adc + a'dc' + a''dc'' + cda + c'da' + c''da'' = 0, \\
bdc + b'dc' + b''dc'' + cdb + c'db' + c''db'' = 0.
\end{gathered}$$

Si l'on suppose que ces axes fixes coïncident avec $Ox_{,}$, $Oy_{,}$, $Oz_{,}$, au bout du temps t, on a alors

$$\begin{array}{lll}
a = 1, & b = 0, & c = 0, \\
a' = 0, & b' = 1, & c' = 0, \\
a'' = 0, & b'' = 0, & c'' = 1,
\end{array}$$

et les équations qui précèdent deviennent

$$\begin{array}{ll}
da = 0, & db + da' = 0, \\
db' = 0, & dc + da'' = 0, \\
dc'' = 0, & dc' + db'' = 0.
\end{array}$$

On aurait les mêmes résultats en différentiant les équations (3).

Posons

$$\frac{db''}{dt} = -\frac{dc'}{dt} = p, \quad \frac{dc}{dt} = -\frac{da''}{dt} = q, \quad \frac{da'}{dt} = -\frac{db}{dt} = r,$$

nous aurons

(5) $u_{,} = qz_{,} - ry_{,}, \quad v_{,} = rx_{,} - pz_{,}, \quad w_{,} = py_{,} - qx_{,}.$

Ces quantités p, q, r détermineront le déplacement après le temps dt des axes $Ox_{,}$, $Oy_{,}$, $Oz_{,}$, liés au corps, car leurs directions nouvelles après le temps dt que nous désignons par Ox', Oy', Oz', font avec celles qu'ils ont au bout du temps t, et qu'on vient de prendre pour axes fixes, les angles qui ont pour cosinus $a + da$, $b + db$, etc.; en faisant

$$a = 1, \quad da = 0, \quad b = 0, \quad db = -rdt, \text{ etc.},$$

c'est-à-dire qu'on a

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} &\cos x_{,} Ox' = a + da = 1, \\ &\cos x_{,} Oy' = db = rdt, \\ &\cos x_{,} Oz' = dc = -qdt, \\ &\cos y_{,} Ox' = da' = -rdt, \\ &\cos y_{,} Oy' = 1, \\ &\cos y_{,} Oz' = dc' = -pdt, \\ &\cos z_{,} Ox' = da'' = -qdt, \\ &\cos z_{,} Oy' = db'' = -pdt, \\ &\cos z_{,} Oz' = 1. \end{aligned} \right.$$

Si l'on reprend des axes fixes quelconques Ox, Oy, Oz, les lignes $Ox_{,}$ et Oy' feront avec eux des angles ayant pour cosinus a, a', a'' et $b + db$, $b' + db'$, $b'' + db''$; on aura

$$\cos x_{,} Oy' \text{ ou } rdt = a(b + db) + a'(b' + db') + a''(b'' + db''),$$

ou

$$(7) \qquad rdt = adb + a'db' + a''db'',$$

et aussi

$$rdt = -\cos y_{,} Ox' = -b(a + da) - b'(a' + da') - b''(a'' + da''),$$

ou

$$(7) \qquad rdt = -bda - b'da' - b''da''.$$

On aura de même les expressions générales de pdt et qdt pour des axes fixes quelconques ; et l'on en déduira les relations $\frac{dc}{dt}=aq-bp$, etc., $pda+qdb+rdc=0$, etc., qui se trouvent dans la *Mécanique* de Poisson, tome II, page 135 ; seconde édition.

Les points du corps dont la vitesse est nulle à l'époque t, se trouvent sur une droite OI représentée par les équations

$$qz_{,}-ry_{,}=0, \quad rx_{,}-pz_{,}=0, \quad py_{,}-qx_{,}=0,$$

ou

$$\frac{x_{,}}{p}=\frac{y_{,}}{q}=\frac{z_{,}}{r}.$$

Cette droite passe par le point fixe et fait avec les axes des angles dont les cosinus sont

$$\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}, \quad \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}, \quad \frac{r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}.$$

Le corps tourne donc autour de cette droite pendant le temps infiniment petit dt. Mais la position de cet axe peut changer d'un instant à un autre ; c'est pourquoi on l'appelle l'*axe instantané de rotation*. Les lieux des axes instantanés successifs dans le corps et dans l'espace sont deux surfaces coniques ayant pour sommet le point fixe O ; elles *se touchent* à l'époque t suivant la droite qui est l'axe instantané actuel, et après le temps dt suivant une autre droite infiniment voisine qui a décrit un angle infiniment petit *du second ordre*, pour devenir le nouvel axe instantané. De sorte que le mouvement du corps n'est autre que celui du premier cone attaché au corps roulant, sans glisser sur la surface de l'autre cône fixe dans l'espace.

La vitesse angulaire de rotation autour de l'axe instantané est égale à $\sqrt{p^2+q^2+r^2}$ que je désignerai par ω.

En effet, la vitesse v d'un point quelconque m est

$$v = \sqrt{(qz_{,} - ry_{,})^2 + (rx_{,} - pz_{,})^2 + (py_{,} - qx_{,})^2}$$
$$= \sqrt{(p^2 + q^2 + r^2)(x_{,}^2 + y_{,}^2 + z_{,}^2) - (px_{,} + qy_{,} + rz_{,})^2}$$
$$= \sqrt{\omega^2 . \mathrm{O}m^2 - (\omega . \mathrm{O}m^2 - \cos \mathrm{IO}m)^2} = \omega . \mathrm{O}m . \sin \mathrm{IO}m = \rho\omega,$$

ρ étant la perpendiculaire abaissée du point m sur l'axe OI; ainsi ω est la vitesse angulaire.

On peut aussi l'obtenir, en cherchant la vitesse d'un point particulier, et la divisant par la distance de ce point à l'axe instantané. Si l'on choisit le point situé sur l'axe $\mathrm{O}z_{,}$, à une distance de l'origine égale à l'unité, on a

$$x_{,} = 0, \quad y_{,} = 0, \quad z_{,} = 1,$$

et

$$u_{,} = q, \quad v_{,} = p, \quad w_{,} = 0,$$

d'où résulte

$$v = \sqrt{p^2 + q^2};$$

la distance de ce point à l'axe est

$$\sin \mathrm{IO}z_{,} \quad \text{ou} \quad \sqrt{1 - \cos^2 \mathrm{IO}z_{,}}$$
$$= \sqrt{1 - \frac{r^2}{p^2 + q^2 + r^2}} = \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}.$$

En divisant v par cette distance, on a bien la vitesse angulaire égale à $\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$ ou ω.

On vérifie que la direction de la vitesse v est perpendiculaire au plan mOI, en observant que les formules (5) donnent les relations

$$x_{,} u_{,} + y_{,} v_{,} + z_{,} w_{,} = 0, \quad pu_{,} + qv_{,} + rw_{,} = 0.$$

Prenons les moments par rapport aux axes $\mathrm{O}x_{,}$, $\mathrm{O}y_{,}$, $\mathrm{O}z_{,}$, de la quantité de mouvement mv du point m, comme si c'était une force (qu'on remplacerait, dans la théorie des couples, par une force égale et parallèle appliquée à l'origine et un couple).

Le moment de mv, par rapport $Ox_{,}$, est $m\,(w_{,}y_{,}-v_{,}z_{,})$, ou

$$my_{,}\,(py_{,}-qx_{,})-mz_{,}\,(rx_{,}-pz_{,}).$$

La somme des moments de tous les points du corps par rapport à l'axe $Ox_{,}$ est donc

$$p\sum m\,(y_{,}^{2}+z_{,}^{2})-q\sum mx_{,}y_{,}-r\sum mx_{,}z_{,}.$$

Cette somme se réduit à Ap, en supposant que les axes $Ox_{,}$, $Oy_{,}$, $Oz_{,}$ soient les axes d'inertie principaux du corps pour le point O, et désignant par A la somme

$$\sum m\,(y_{,}^{2}+z_{,}^{2}).$$

Ainsi, en nommant A, B, C les trois moments d'inertie principaux du corps par le point O; Ap, Bq, Cr sont les sommes des moments des quantités de mouvement des points du corps par rapport aux axes principaux $Ox_{,}$, $Oy_{,}$, $Oz_{,}$. (Dans la théorie des couples, ces moments sont ceux de trois couples agissant dans les trois plans coordonnés $X_{,}$, $OY_{,}$,.... Ils donnent un couple résultant dont le moment $G=\sqrt{A^{2}p^{2}+B^{2}q^{2}+C^{2}r^{2}}$; la perpendiculaire à son plan fait avec les axes $Ox_{,}$, $Oy_{,}$, $Oz_{,}$ des angles qui ont pour cosinus $\frac{Ap}{G}$, $\frac{Bq}{G}$, $\frac{Cr}{G}$. M. Poinsot a remarqué que ce plan est le plan diamétral conjugué au diamètre de l'ellipsoïde central $AX^{2}+BY^{2}+CZ^{2}=1$, qui est dirigé suivant l'axe instantané, pour lequel les cosinus sont $\frac{p}{\omega}$, $\frac{q}{\omega}$, $\frac{r}{\omega}$.)

Si l'on prend des axes fixes quelconques, on aura la somme des moments des quantités de mouvement par rapport à l'axe Ox d'après les lois connues de la composition des moments ou des couples, en multipliant les moments

Ap, Bq, Cr relatifs aux axes $Ox_{,}$, $Oy_{,}$, $Oz_{,}$, par les cosinus a, b, c des angles que OX fait avec ces axes, et ajoutant, c'est-à-dire que

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) = Apa + Bqb + Crc,\\ &\sum m\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) = Apa' + Bqb' + Crc',\\ &\sum m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = Apa'' + Bqb'' + Crc''.\end{aligned}\right.$$

Équations du mouvement. Supposons maintenant que des forces motrices données agissent sur le corps solide. Désignons par X, Y, Z les composantes parallèles à des axes fixes de la force appliquée à la molécule m qui a pour coordonnées x, y, z. D'après le principe de d'Alembert, les forces perdues $\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}, \text{ etc.}\right)$ doivent se faire équilibre autour du point fixe O : il faut et il suffit pour cela que la somme de leurs moments, par rapport à chacun des axes fixes, soit égale à zéro, ce qui donne les trois équations

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right) = \sum(Zy - Yz) = L,\\ &\sum m\left(z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2}\right) = M,\\ &\sum m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) = N;\end{aligned}\right.$$

en désignant par L, M, N les sommes de moments des forces motrices par rapport aux axes fixes,

$$\sum(Zy - Yz),\quad \sum(Xz - Zx),\quad \sum(Yx - Xy).$$

La première équation peut s'écrire ainsi :

$$(9)\qquad \frac{d}{dt}\sum m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) = L.$$

Mais on a trouvé plus haut, équation (8),

$$\sum m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) = \mathrm{A}pa + \mathrm{B}qb + \mathrm{C}rc.$$

Donc on a

$$\frac{d}{dt}.(\mathrm{A}pa + \mathrm{B}qb + \mathrm{C}rc) = \mathrm{L},$$

ou

$$\mathrm{A}a\frac{dp}{dt} + \mathrm{B}b\frac{dq}{dt} + \mathrm{C}c\frac{dr}{dt} + \mathrm{A}p\frac{da}{dt} + \mathrm{B}q\frac{db}{dt} + \mathrm{C}r\frac{dc}{dt} = \mathrm{L}.$$

Faisons coïncider les axes fixes avec les axes principaux du corps $\mathrm{O}x_{,}$, $\mathrm{O}y_{,}$, $\mathrm{O}z_{,}$, pris dans la position qu'ils occupent au bout du temps t. Nous aurons alors

$$a = 1, \quad b = 0, \quad c = 0, \quad \frac{da}{dt} = 0, \quad \frac{db}{dt} = -r, \quad \frac{dc}{dt} = q.$$

En même temps il faut remplacer L ou $\sum m(\mathrm{Z}y - \mathrm{Y}z)$ par la somme des moments des forces données

$$\sum m(\mathrm{Z}_{,}y_{,} - \mathrm{Y}_{,}z_{,}),$$

par rapport à l'axe $\mathrm{O}x_{,}$, que nous désignerons par $\mathrm{L}_{,}$.

L'équation précédente devient

$$\mathrm{A}\frac{dp}{dt} + (\mathrm{C} - \mathrm{B})qr = \mathrm{L}_{,}. \tag{10}$$

Les deux autres équations (9) donnent, de même,

$$\mathrm{B}\frac{dq}{dt} + (\mathrm{A} - \mathrm{C})pr = \mathrm{M}_{,},$$

$$\mathrm{C}\frac{dr}{dt} + (\mathrm{B} - \mathrm{A})pq = \mathrm{N}_{,}.$$

Ce sont les formules d'Euler; $\mathrm{L}_{,}$, $\mathrm{M}_{,}$, $\mathrm{N}_{,}$ désignant les moments des forces motrices par rapport aux axes principaux du corps à l'époque t.

On les obtient encore de la manière suivante :

D'après les lois de la composition des moments ou des couples, analogue à celle des forces, la somme Ap des moments des quantités de mouvement par rapport à l'axe $Ox_{,}$ est égale à la somme des moments par rapport aux axes fixes multipliés par les cosinus a, a', a'', des angles que $Ox_{,}$ fait avec ces axes fixes. Ainsi, l'on a

$$Ap = a\sum m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) + a'\sum m\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) + a''\sum m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right),$$

et, en différentiant,

$$A\frac{dp}{dt} = a\sum m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right) + a'\sum m\left(z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2}\right) + a''\sum m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) + \frac{da}{dt}\sum m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) + \frac{da'}{dt}\sum m\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) + \frac{da''}{dt}\sum m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right),$$

ou, d'après les équations (9),

$$A\frac{dp}{dt} = aL + a'M + a''N + \frac{da}{dt}\sum m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) + \frac{da'}{dt}\sum m\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) + \frac{da''}{dt}\sum m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right).$$

Si l'on fait coïncider les axes fixes avec les axes $Ox_{,}$, $Oy_{,}$, $Oz_{,}$, au bout du temps t, cette équation deviendra

$$A\frac{dp}{dt} = L_{,} + r.Bq - q.Cr,$$

ou

$$A\frac{dp}{dt} + (C - B).qr = L_{,}.$$

Car, dans cette coïncidence, on a

$$a = 1,\quad a' = 0,\quad a'' = 0,\quad \frac{da}{dt} = 0,\quad \frac{da'}{dt} = r,\quad \frac{db''}{dt} = -q.$$

L devient $L_{\prime}$, et les sommes des moments

$$\sum m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right),\ \text{etc.},$$

deviennent celles qui se rapportent aux axes $Oy_{\prime}$, $Oy_{\prime}$, $Oz_{\prime}$, c'est-à-dire Ap, Bq, Cr.

On arrive ainsi aux équations d'Euler sans avoir besoin de calculer les forces accélératrices d'un point quelconque parallèles à des axes fixes, ou aux axes principaux du corps, ni les forces centrifuges de M. Poinsot. Au surplus, on peut encore trouver les expressions de ces forces d'une manière assez simple.

Les projections de la vitesse v sur les axes $Ox_{\prime}$, $Oy_{\prime}$, $Oz_{\prime}$ étant données par les formules (5), sa projection sur l'un des axes fixes $Ox_{\prime}$ est

$$(11)\qquad \frac{dx}{dt}=a(qz_{\prime}-ry_{\prime})+b(rx_{\prime}-pz_{\prime})+c(py_{\prime}-qx_{\prime}).$$

De là résulte

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}&=a\left(z_{\prime}\frac{dq}{dt}-y_{\prime}\frac{dr}{dt}\right)+b\left(x_{\prime}\frac{dr}{dt}-z_{\prime}\frac{dp}{dt}\right)\\&+c\left(y_{\prime}\frac{dp}{dt}-x_{\prime}\frac{dq}{dt}\right)+(qz_{\prime}-ry_{\prime})\frac{da}{dt}+(rx_{\prime}-pz_{\prime})\frac{db}{dt}\\&+(py_{\prime}-qx_{\prime})\frac{dc}{dt}.\end{aligned}$$

Si l'on prend encore pour axes fixes les axes $Ox_{\prime}$, $Oy_{\prime}$, $Oz_{\prime}$ dans la position où ils se trouvent à l'époque t, $\frac{d^2x}{dt^2}$ deviendra la composante $p_{\prime}$ de la force accélératrice du point m parallèle à l'axe $Ox_{\prime}$, et l'on aura $\left(\text{en faisant } a=1,\ b=0,\ c=0,\ \frac{da}{dt}=0,\ \frac{db}{dt}=r,\ \frac{dc}{dt}=q\right)$

$$p_{\prime}=z_{\prime}\frac{dq}{dt}-y_{\prime}\frac{dr}{dt}+(py_{\prime}-qx_{\prime})q-(rx_{\prime}-pz_{\prime})r,$$

ou

$$p_{,} = z_{,} \frac{dq}{dt} - y_{,} \frac{dr}{dt} - (p^2 + q^2 + r^2) x_{,} + p (p x_{,} + q y_{,} + r z_{,}) \;(*).$$

On connaît donc les composantes $p_{,}$, $q_{,}$, $r_{,}$ de la force accélératrice du point m parallèles aux axes $Ox_{,}$, $Oy_{,}$, $Oz_{,}$.

Les forces perdues $X_{,} - mp_{,}$, $Y_{,} - mq_{,}$, $Z_{,} - mr_{,}$ doivent se faire équilibre autour du point fixe O; en égalant leurs moments à zéro, on aura

$$\sum [(Z_{,} - mr_{,}) y_{,} - (Y_{,} - mq_{,}) z_{,}] = 0, \quad \text{etc.}$$

Substituant les valeurs de $p_{,}$, $q_{,}$, $r_{,}$ et réduisant, on retrouvera les équations d'Euler.

A ces équations, qui expriment comment varient la vitesse de rotation et la position de l'axe instantané par rapport aux axes principaux du corps, il faut joindre les formules (3), ou plutôt trois relations équivalentes entre p, q, r et les variations des angles désignés par ψ, θ, φ de la *Mécanique* de Poisson, angles qui définissent la position des axes principaux du corps solide par rapport à un système d'axes fixes Ox, Oy, Oz.

On obtient immédiatement les formules de la page 134,

$$p\, dt = \sin\varphi \sin\theta\, d\psi + \cos\varphi\, d\theta, \quad \text{etc.},$$

(*) Si du point m on abaisse mi perpendiculaire sur l'axe instantané, on voit que la partie $-(p^2 + q^2 + r^2) x_{,} + p (p x_{,} + q y_{,} + r z_{,})$ représente la projection sur l'axe $Ox_{,}$ d'une force dirigée suivant cette perpendiculaire mi et qui a pour valeur $\omega^2 . mi$. Car, en projetant le triangle Omi sur $Ox_{,}$, on a

$$\begin{aligned} mi \cos(mi, Ox_{,}) &= Oi \cos(Oi, Ox_{,}) - Om \cos(Om, Ox_{,}) \\ &= \left(\frac{p}{\omega} x_{,} + \frac{q}{\omega} y_{,} + \frac{r}{\omega} z_{,}\right) \frac{p}{\omega} - x_{,}, \end{aligned}$$

d'où

$$\omega^2 . mi . \cos(mi, Ox_{,}) = p (p x_{,} + q y_{,} + r z_{,}) - (p^2 + q^2 + r^2) x_{,}.$$

à l'aide du théorème sur la composition des rotations infiniment petites, en vertu duquel, si l'on prend sur l'axe de chaque rotation (dans un certain sens) une longueur qui représente la grandeur de cette rotation, la somme des projections sur une droite quelconque de plusieurs rotations est égale à la projection de la rotation résultante. Il en résulte que la rotation $\omega\, dt$ du corps autour de l'axe instantané équivaut aux trois rotations successives $p\,dt$, $q\,dt$, $r\,dt$ autour des axes $Ox_{,}$, $Oy_{,}$, $Oz_{,}$ et aussi aux trois rotations successives du corps autour des lignes Oz, ON et $Oz_{,}$ indiquées par les différentielles $d\psi$, $d\theta$ et $d\varphi$. En outre, $p\,dt$, projection sur la ligne $Ox_{,}$ de la rotation effective $\omega\, dt$, est égale à la somme des projections sur $Ox_{,}$ des trois rotations correspondantes à $d\psi$, $d\theta$ et $d\varphi$, c'est-à-dire qu'on a

$$p\,dt = d\psi \cos zOx_{,} + d\theta \cos \mathrm{NO}x_{,} + d\varphi \cos z_{,}Ox_{,},$$

ou

$$p = \cos\varphi \frac{d\theta}{dt} + \sin\theta \sin\varphi \frac{d\psi}{dt}.$$

On trouve de même q et r, et, réciproquement, $\frac{d\psi}{dt}$, $\frac{d\theta}{dt}$ et $\frac{d\varphi}{dt}$ en fonction de p, q, r.

On trouve aussi les mêmes formules en différentiant simplement les équations

$$\operatorname{tang}\psi = -\frac{c}{c'}, \quad \cos\theta = c'', \quad \operatorname{tang}\varphi = \frac{a''}{b''};$$

puis, remplaçant dc, dc', etc., par les valeurs qui se trouvent à la page 135, et qu'on obtient aussi en comparant les expressions (4) et (11) de $\frac{dx}{dt}$, etc.

On peut abréger de la même manière les calculs par lesquels M. Coriolis a établi son théorème sur le mouvement relatif d'un point ou d'un système de points par rapport à des axes qui ont un mouvement donné dans l'espace (*Calcul de l'effet des Machines*, pages 40 et suivantes). Pour le cas d'un système, il faut prendre la formule générale de dynamique

$$\sum m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right)$$
$$= \sum (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z), \quad \text{ou} \quad \sum P\delta p,$$

substituer les valeurs de $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$, δx, δy, δz qui résultent des formules

$$x = \xi + ax_{,} + by_{,} + cz_{,},$$
$$y = \eta + a'x_{,} + b'y_{,} + c'z_{,},$$
$$z = \zeta + a''x_{,} + b''y_{,} + c''z_{,},$$

où ξ, a, b, c, $x_{,}$, etc., sont variables avec t, et prendre ensuite les axes fixes Ox, Oy, Oz parallèles aux axes mobiles $Ox_{,}$, $Oy_{,}$, $Oz_{,}$ considérés dans la position qu'ils occupent au bout du temps t, ce qui donne

$$a = 1, \qquad b = 0, \qquad c = 0, \quad \text{etc.},$$
$$\frac{da}{dt} = 0, \qquad \frac{db}{dt} = r, \quad \text{etc.},$$
$$\delta x = \delta x_{,}, \quad \delta y = \delta y_{,}, \quad \delta z = \delta z_{,}, \quad \text{etc.}$$

Les liaisons du système étant exprimées par des équations

$$L = 0, \quad M = 0, \quad \text{etc.},$$

entre t, $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, etc., on arrive, par la méthode de Lagrange, à des équations telles que

$$m\frac{d^2x_{,}}{dt^2} = X_{,} - X_{e} - m\left(q\frac{dz_{,}}{dt} - r\frac{dy_{,}}{dt}\right) + \lambda\frac{dL}{dx_{,}} + \mu\frac{dM}{dx_{,}} + \ldots,$$

$X_{,}$ étant la composante parallèle à $Ox_{,}$ de la force motrice appliquée au point m, et X_{e} celle de sa force d'entraînement.