NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

BARBET

Le plus court chemin d'un point à un autre, sur la surface d'une sphère, est le plus petit des arcs du grand cercle qui passe par ces points

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 10 (1851), p. 415-417

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1851_1_10__415_1>

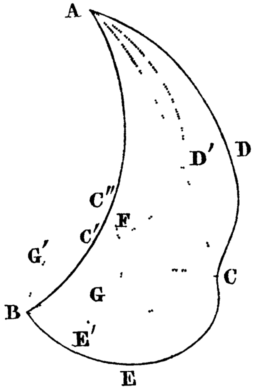
Le plus court chemin d'un point à un autre, sur la surface d'une sphère, est le plus petit des arcs du grand cercle qui passe par ces points;

Par M. BARBET,
Chef d'institution.

Si l'on suppose entre A et B une ligne ADCEB autre que l'arc de grand cercle AB qui les joint, cette ligne ne

(*) Contrairement à ce que j'avais cru d'abord, cette formule n'est pas nouvelle : elle n'est même qu'un cas particulier de celle que fournit le calcul des différences. (Lacroix, tome III, page 183.) En publiant cette Note, je n'ai donc eu qu'un but, celui d'être utile aux élèves.

sera pas le plus court chemin entre A et B, car on pourra en trouver un plus court.



Pour le démontrer, on prend sur la ligne ADCEB un point C ; on le joint aux points A et B par les arcs de grand cercle AC, BC, et l'on forme un triangle sphérique ABC dans lequel on a $AB < AC + BC$. Donc si l'on fait pivoter autour du point A, sur la surface de la sphère, la portion de ligne ADC et l'arc de cercle AC jusqu'à ce que le point C vienne en C', et si l'on opère de même sur la portion de ligne BEC et l'arc de cercle BC, par rapport au point B, le point C tombe sur AB entre A et C' au point C''. Les deux parties du chemin deviennent AD'C', BE'C'' et se coupent en F, de telle sorte que le chemin AD'FE'B est plus court que le chemin ADCEB de la ligne brisée C'FC''.

1re *Remarque*. Le succès de cette démonstration résulte de ce que les deux arcs de cercle AC et BC ayant été rabattus sur l'arc AB, la portion BE'C'' du chemin ADCEB coupe en F la portion AD'C'. Il pourrait se faire que la deuxième portion du chemin, au lieu d'avoir la position CEB, eût la position CGB, de telle sorte qu'après le rabattement de l'arc BC sur BA cette portion CGB prît la position C''G'B. Il n'y aurait pas alors de point de rencontre de cette portion C''G'B avec AD'C'. Mais s'il y a d'un côté d'un arc de grand cercle BC une ligne BGC, on peut en concevoir une BEC symétriquement placée de l'autre côté, et égale à la première Substituant celle-ci à l'autre, on peut prendre au lieu du chemin ADGEB le chemin égal ADCEB, auquel on applique la démonstration précédente.

2^e *Remarque.* Si la ligne qui va du point A au point B, autre que l'arc de cercle AB, au lieu d'être placée entièrement d'un même côté de l'arc AB, le coupait en plusieurs points D, F, H, K, on établirait comme ci-dessus que chaque segment tel que AD est plus petit que la partie correspondante ACD de la ligne, autre que l'arc de grand cercle AB, qui va du point A au point B. Et en ajoutant membre à membre toutes ces inégalités on en conclurait arc AB $<$ ACDEFGHIKB.