TH. CLAUSEN

Intégration d'une équation différentielle
$$\int \frac{y\,dy}{(y^3+8)\sqrt{y^3-1}}$$

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 10 (1851), p. 362-363

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1851_1_10__362_0>

INTÉGRATION D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

$$\int \frac{y\,dy}{(y^3+8)\sqrt{y^3-1}}:$$

PAR M TH. CLAUSEN.

(Nouvelles astronomiques de Schumacher, n° 442; t. XIX, p. 178; 1842.)

Posons

$$z = \frac{y-1}{\sqrt{y^3-1}}, \quad z' = \sqrt{y^3-1}, \quad z'' = \frac{(y-1)^2}{\sqrt{y^3-1}},$$

$$dz = -\frac{y^3-3y^2+2}{2(y^3-1)^{\frac{3}{2}}}dy, \quad dz' = \frac{3}{2}\frac{y^2\,dy}{\sqrt{y^3-1}},$$

$$dz'' = \frac{1}{2}\frac{y^4+2y^3-3y^2-4y+4}{(y^3-1)^{\frac{3}{2}}}dy,$$

$$\frac{dz}{1-3z^2} = -\frac{1}{2}\frac{y^2-2y-2}{y^2-2y+4}\frac{dy}{\sqrt{y^3-1}},$$

$$\frac{dz'}{z'^2+9} = \frac{3}{2}\frac{y^2}{y^3+8}\frac{dy}{\sqrt{y^3-1}},$$

$$\frac{dz''}{z''^2+9} = \frac{1}{2}\frac{y-1}{y+2}\frac{dy}{\sqrt{y^3-1}}.$$

d'où

$$\frac{dz}{1-3z^2} + \frac{dz'}{z'^2+9} + \frac{dz''}{z''^2+9} = \frac{6y\,dy}{(y^3+8)\sqrt{y^3-1})}.$$

Donc

$$\int \frac{y\,dy}{(y^3+8)\sqrt{y^3-1}} = \frac{1}{12\sqrt{3}}\log\left(\frac{1+z\sqrt{3}}{1-z\sqrt{3}}\right)$$

$$+\frac{1}{18}\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{3}z' + \frac{1}{18}z' \operatorname{arc\,tang}\frac{1}{3}z''$$

$$= \frac{1}{12\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{y^2+y+1}+\sqrt{y-1}.\sqrt{3}}{\sqrt{y^2+y+1}-\sqrt{y-1}.\sqrt{3}}\right)$$

$$+\frac{1}{18}\operatorname{arc\,tang}\left[\frac{3y(y-1)}{(4-y)\sqrt{y^3-1}}\right].$$

Observation. Legendre trouve cette intégrale par un moyen très-compliqué et la vérifie par une méthode plus courte. (*Traité des Fonctions elliptiques*, chapitre XXVI, n° 138.)