Nouvelles annales de mathématiques

Questions

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 10 (1851), p. 357-358

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1851_1_10__357_0>

QUESTIONS.

238. Quand une suite d'ellipsoïdes est inscrite dans un cône de révolution suivant la même courbe de contact, on a, entre leurs demi-axes, a, b, c, la relation suivante :

$$\frac{b^3}{\sqrt{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}} = \text{constante}.$$

(Michael Roberts.)

239. Démontrer la formule suivante :

$$\frac{1}{4}\pi e^{-a^2} - \frac{1}{2}\pi e^{-a^2}\int_0^a \frac{e^{\frac{-x^4+a^2x^2}{x^2-y^2}}dy}{\sqrt{a^2-y^2}}$$

$$= \int_a^x \frac{e^{-x^2}x^2dx}{\sqrt{x^2-a^2}}\cdot\int_0^a \frac{e^{-y^2}dy}{\sqrt{a^2-y^2}}$$

$$- \int_a^x \frac{e^{-x^2}dx}{\sqrt{x^2-a^2}}\cdot\int_0^a \frac{e^{-y^2}y^2dy}{\sqrt{a^2-y^2}}.$$

(Strebor.)

240. La position d'équilibre d'un corps surnageant n'a lieu que lorsque la distance du centre de gravité du liquide déplacé au centre de gravité du corps est un maximum ou un minimum, ou bien encore lorsque le centre commun de gravité du corps et du fluide déplacé est à sa plus haute ou plus basse position. [Clausen (Th.), astronome de l'observatoire d'Altona.]

241. Soit

$$T_{n+2} = a\,T_{n+1} - b\,T_n,$$

équation caractéristique d'une série récurrente; on a

$$\frac{T_{n+1}^2 - a\,T_n\,T_{n+1} + b\,T_n^2}{b^n} = \text{constante.}$$

(EULER.)

242. Soit

$$T_{n+2} = 2\,T_{n+1} + T_n,$$

équation d'une série récurrente. Les deux premiers termes étant 1 et 3, aucun terme n'est un carré, à l'exception de 1.

243. Soit l'équation

$$(x - a_1)(x - a_4)(x - a_5)(x - a_8)(x - a_9)\ldots(x - a_{4n})$$
$$+ b^m(x - a_2)(x - a_3)(x - a_6)(x - a_7)\ldots(x - a_{4n-1}) = 0;$$

les indices augmentent successivement d'une unité et de trois unités; les différences $a_1 - a_2$, $a_2 - a_3$, ..., $a_{4n-1} - a_{4n}$ sont positives; b est un nombre positif; m un nombre entier positif; les $2n$ racines sont réelles et comprises entre a_1 et a_2, a_3 et a_4, ..., a_{4n-1} et a_{4n}. (RICHELOT.)

244. Dans un produit de n facteurs monômes, on ne peut changer que $2^{n-1} - 1$ fois les signes des facteurs, soit en totalité, soit en partie, sans changer le signe du produit.

245. Soit

$$z = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \ldots + a_n x_n;$$

supposons que x_1, x_2, ..., x_n puissent prendre respectivement m_1, m_2, ..., m_n valeurs différentes; alors z aura au plus $m_1\,m_2\,m_3\ldots m_n$ valeurs différentes; mais il peut en avoir moins. Dans quel cas?

246. Résoudre l'équation

$$u^6 - 6u^4 + au^3 + 9u^2 - 3au + f = 0.$$

247. Résoudre l'équation

$$3^x = 54x - 135\ (^*).$$

248. $4mn - m - 1$ ne peut jamais être un carré, soit entier, soit fractionnaire. (GOLDBACH.)

(*) Les équations de cette forme ont toujours deux racines réelles. (D. BERNOULLI.)