Nouvelles annales de mathématiques

Rouché

Solution de la question 233

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 10 (1851), p. 353-355

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1851_1_10__353_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 233

(voir t. IX, p. 182);

PAR M. ROUCHÉ,

Élève en spéciales du lycée de Montpellier.

T étant l'aire d'un triangle rectiligne, r et R les rayons des cercles inscrit et circonscrit, a, b, c les trois côtés, on a les équations

$$a+b+c=2p,\quad pr=\mathrm{T},$$
$$p(p-a)(p-b)(p-c)=\mathrm{T}^2,\quad abc=4\mathrm{RT}.$$

En combinant les deux premières, et développant la troi-

(*) La méthode dite de Horner est dans les *Transactions philosophiques*, 1819. Nous ne voyons pas en quoi elle diffère de la méthode Fourier-Budan.

sième, on obtient le système

$$\sum a = \frac{2T}{r}, \quad \sum ab = \frac{T^2}{r^2} + 4Rr + r^2, \quad abc = 4RT,$$

qui, par le changement de a, b, c, en $2(p-a)$, $2(p-b)$, $2(p-c)$, donne à son tour

$$\sum 2(p-a) = \frac{2T}{r}, \quad \sum 2(p-a)\,2(p-b) = 4r(4R+r),$$

$$2(p-a)\,2(p-b).2(p-c) = 8rT.$$

Les côtés a, b, c sont donc racines de l'équation

$$(1) \qquad z^3 - \frac{2T}{r}z^2 + \left(\frac{T^2}{r^2} + 4Rr + r^2\right)z - 4RT = 0;$$

et les quantités $a+b-c$, $a+c-b$, $b+c-a$, sont racines de celle-ci :

$$(2) \qquad u^3 - 2\frac{T}{r}u^2 + 4r(4R+r)u - 8rT = 0$$

En appliquant le théorème de M. Sturm à l'équation générale

$$x^3 - Ax^2 + Bx - C = 0,$$

on trouve, pour la réalité des racines, la relation unique

$$-4A^3C + A^2B^2 + 18ABC - 4B^3 - 27C^2 > 0 \ (*).$$

Cette condition, relativement aux équations particulières (1) et (2), fournit le même résultat

$$T^4 - 2r^2(2R^2 + 10Rr - r^2)T^2 + r^3(4R+r)^3 < 0.$$

Le premier membre est un trinôme du second degré en T^2; pour qu'il soit négatif, il faut que l'équation obtenue en l'égalant à zéro ait ses racines réelles, et que T^2 soit compris entre les deux racines.

(*) *Nouvelles Annales*, t. III, p. 161; Note de M. Tarnier.

Ces deux racines ont pour expression

$$r^2\left[2R^2 + 10Rr - r^2 \pm 2\sqrt{R(R-2r)^3}\right],$$

et comme elles sont positives en même temps que réelles, les conditions précédentes deviennent

$$R > 2r,$$

et

$$r\sqrt{2R^2 + 10Rr - r^2 + 2\sqrt{R(R-2r)^3}} > T,$$
$$T > r\sqrt{2R^2 + 10Rr - r^2 - 2\sqrt{R(R-2r)^3}}.$$

Lorsque $R > 2r$ et que T est égal à une de ces limites, l'équation (1) a deux racines égales, et le triangle est isocèle.

Si $R = 2r$, les deux limites se confondent, T devient égal à cette limite $3r^2\sqrt{3}$; l'équation (1) prend la forme

$$z^3 - 6\sqrt{3}rz^2 + 36r^2z - 24\sqrt{3}r^3 = 0;$$

elle a ses trois racines égales, et le triangle est équilatéral.

On parviendrait aux mêmes conditions de réalité en faisant évanouir les seconds termes des équations (1) et (2), et appliquant ensuite le caractère $4p^3 + 27q^2 < 0$.

Note. Cet élève fait la judicieuse remarque que la question 230 est un corollaire de la question 232.