

DIEU

Concours d'agrégation aux lycées, année 1841

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 10
(1851), p. 330-336

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1851_1_10__330_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1851, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

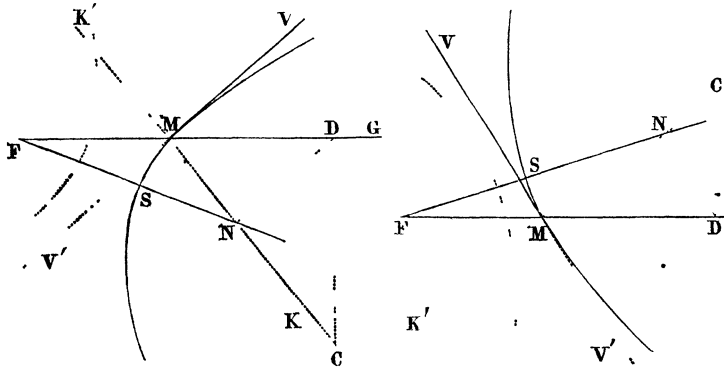
<http://www.numdam.org/>

CONCOURS D'AGRÉGATION AUX LYCÉES, ANNEE 1841;

PAR M. DIEU,
Agrége, docteur es sciences

COMPOSITION DE MÉCANIQUE.

Déterminer le mouvement d'un point matériel repoussé par un centre fixe, en raison inverse du carré de la distance.



F étant le point d'où émane la force répulsive, M la

position du mobile, et MV la direction de sa vitesse à l'époque à partir de laquelle on compte le temps, il est évident qu'il ne sortira pas du plan FMV .

Nous prendrons F pour pôle, FM pour axe polaire, et nous désignerons par ω , ρ et ν les coordonnées et la vitesse du mobile à la fin du temps t , par ρ_0 et ν_0 les valeurs initiales de ρ et ν , par α l'angle FMV , compris entre o et π , enfin par μ la force répulsive rapportée aux unités de masse et de distance.

Le principe des forces vives donne

$$(1) \quad \frac{d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2}{dt^2} = a - \frac{2\mu}{\rho},$$

en posant $\nu_0^2 + \frac{2\mu}{\rho_0} = a$ pour abrégier, et celui des aires,

$$(2) \quad \rho^2 d\omega = c dt,$$

c étant déterminée en fonction des données ρ_0 , ν_0 et α par l'équation

$$c = \rho_0 \nu_0 \sin \alpha.$$

L'élimination de dt , entre les équations (1) et (2), conduit à

$$c^2 \cdot \left(\frac{d \cdot \frac{1}{\rho}}{d\omega} \right)^2 + \frac{c^2}{\rho^2} = a - \frac{2\mu}{\rho};$$

en résolvant cette équation par rapport à $d\omega$, puis en intégrant, on trouve

$$\omega - \beta = \pm \arccos \left(\frac{\frac{\mu}{c} + \frac{c}{\rho}}{\sqrt{a + \frac{\mu^2}{c^2}}} \right),$$

— β étant la constante amenée par cette dernière opéra-

tion ; et l'on tire de là

$$(3) \quad \rho = \frac{\frac{c^2}{\mu}}{\sqrt{\frac{ac^2}{\mu^2} + 1} \cdot \cos(\omega - \beta) - 1}$$

Afin que $\omega = 0$ donne $\rho = \rho_0$, il faut qu'on ait

$$\cos \beta = \frac{c^2 + \rho_0 \mu}{\rho_0 \sqrt{ac^2 + \mu^2}},$$

et nous prendrons pour β le plus petit arc positif qui satisfasse à cette équation.

L'équation (3) représente une hyperbole dont le point F est un des foyers ; le mouvement s'effectue sur la branche opposée à ce foyer, puisque ρ a initialement la valeur positive ρ_0 qui répond à un point de cette branche ; et l'on voit facilement que la droite qui va du foyer F à l'autre fait avec FM, dans le sens de ω , un angle égal à $2\pi - \beta$ ou à β , suivant que $\alpha > \frac{\pi}{2}$ ou $< \frac{\pi}{2}$.

A et B désignant les demi-axes de cette hyperbole, on a

$$\frac{B^2}{A} = \frac{c^2}{\mu}, \quad \frac{A^2 + B^2}{A^2} = \frac{ac^2}{\mu^2} + 1,$$

d'où

$$A = \frac{\mu}{a}, \quad B = \frac{c}{\sqrt{a}},$$

et l'on pourrait la construire d'après ces formules ; mais il est préférable d'employer le théorème de Newton, par lequel on a $N = R \cos^2 \varphi$, N étant la normale, R le rayon de courbure, et φ l'angle compris entre la normale et le rayon vecteur. Pour cela, on décompose la force répulsive $\frac{\mu}{\rho^2}$, qui répond à la position initiale M du mobile, et qui est dirigée suivant le prolongement de FM, en deux

autres forces dirigées l'une suivant MV ou son prolongement MV' , et l'autre suivant la perpendiculaire KK' à VV' ; cette dernière composante, qui est représentée par $\frac{\mu}{\rho_0} \cdot \sin \alpha$, est égale à la force centripète correspondant à la position initiale, de sorte qu'on a

$$\frac{v_0^2}{R} = \frac{\mu}{\rho_0^2} \sin \alpha,$$

d'où

$$R = \frac{v_0^2 \rho_0^2}{\mu \sin \alpha},$$

R désignant maintenant le rayon de courbure relatif au point M ; on prend, d'après cette équation, $MC = R$ sur la partie de KK' où tombe la composante $\frac{\mu}{\rho_0} \cdot \sin \alpha$, on mène CD perpendiculaire à FG , DN perpendiculaire à KK' , ce qui donne, en vertu du théorème précité, le pied N de la normale au point M ; enfin FN est conséquemment la direction de l'axe focal, et la construction de l'hyperbole s'achève par des procédés qu'il est inutile de rappeler.

On tire des équations (1) et (2)

$$\pm dt = \frac{\rho d\rho}{\sqrt{a\rho^2 - 2\mu\rho - c^2}},$$

et, en intégrant cette équation, on a

$$(4) \left\{ \begin{array}{l} \pm t = \frac{1}{a} \sqrt{a\rho^2 - 2\mu\rho - c^2} \\ + \frac{\mu}{a\sqrt{a}} \cdot \log \left(\frac{\rho}{\sqrt{a}} - \frac{\mu}{a\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a\rho^2 - 2\mu\rho - c^2}}{a} \right) - C, \end{array} \right.$$

C étant une constante.

Si $\alpha > \frac{\pi}{2}$, ρ augmente continuellement avec t ; on doit

donc prendre + devant dt et t , et faire

$$(\gamma) \left\{ \begin{array}{l} C = \frac{1}{a} \sqrt{a\rho_0^2 - 2\mu\rho_0 - c^2} \\ + \frac{\mu}{a\sqrt{a}} \cdot \log \left(\frac{\rho_0}{\sqrt{a}} - \frac{\mu}{a\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a\rho_0^2 - 2\mu\rho_0 - c^2}}{a} \right), \end{array} \right.$$

afin que $\rho = \rho_0$ donne $t = 0$.

Si $\alpha < \frac{\pi}{2}$, ρ diminue d'abord, puis ensuite augmente avec t , et son minimum, qui répond à $\omega = \beta$, est

$$\frac{\frac{c^2}{\mu}}{\sqrt{\frac{ac^2}{\mu^2} + 1} - 1} = A + \sqrt{A^2 + B^2} = \rho_1;$$

on doit donc prendre premièrement le signe — devant dt et t , ainsi que la valeur précédente de C ; puis, lorsque ρ atteint ρ_1 et dépasse ce minimum, ce qui arrive quand

$$t = C - \frac{\mu}{a\sqrt{a}} \cdot \log \left(\frac{\rho_1}{\sqrt{a}} - \frac{\mu}{a\sqrt{a}} \right) = t',$$

prendre + devant dt et t , et faire

$$(\gamma') \quad C = \frac{\mu}{a\sqrt{a}} \cdot \log \left(\frac{\rho_1}{\sqrt{a}} - \frac{\mu}{a\sqrt{a}} \right) - t',$$

afin que $\rho = \rho_1$ donne $t = t'$.

Les équations (3) et (4) fournissent directement l'époque du passage du mobile en un point de l'hyperbole donné seulement par la valeur correspondante de ω . Si l'on voulait sa position à un instant donné, il faudrait résoudre l'équation (4) par rapport à ρ , mettre la valeur obtenue dans l'équation (3), puis la résoudre par rapport à ω .

La vitesse est toujours dirigée tangentiellement à l'hy-

perbole, et sa grandeur est donnée par l'équation (1) de laquelle on déduit

$$v = \sqrt{a - \frac{2\mu}{\rho}}.$$

Si $\alpha > \frac{\pi}{2}$, elle augmente continuellement, tandis que si $\alpha < \frac{\pi}{2}$, elle diminue d'abord jusqu'à $\sqrt{a - \frac{2\mu}{\rho_1}}$, et augmente ensuite; dans les deux cas elle tend à devenir uniforme et égale à \sqrt{a} . On peut remarquer que v ne dépend pas de α , de sorte que la vitesse aura la même grandeur à des distances égales de F, quel que soit cet angle. Il n'en est pas ainsi de t dont l'expression contient c qui dépend de α ; c a bien la même valeur pour des angles (α) supplémentaires l'un de l'autre, mais la constante C doit recevoir la valeur (γ) pour un de ces angles, et la valeur (γ') pour l'autre quand on considère des rayons vecteurs égaux.

Si l'on suppose que le mouvement a commencé avant l'instant à partir duquel on compte le temps, on peut demander de le déterminer à une époque quelconque antérieure à celle-là. Il suffit pour cela de considérer des valeurs négatives de t et de ω ; si $\alpha > \frac{\pi}{2}$, on prendra + devant dt et t , avec la valeur (γ) de C, jusqu'à $\rho = \rho_1$, qui répond à $\omega = -\beta$, et $t = -t'$, puis antérieurement on prendra - devant dt et t , avec la valeur (γ') de C; et si $\alpha < \frac{\pi}{2}$, on prendra toujours - avec la valeur (γ'). On peut remarquer que des arcs de même longueur et symétriques par rapport à l'axe focal de l'hyperbole seront décrits par le mobile dans des temps égaux.

Enfin, si l'on avait $\alpha = \pi$ ou $\alpha = 0$, la trajectoire serait évidemment la droite FM. Dans ces deux cas parti-

culiers, on a

$$\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 = a - \frac{2\mu}{\rho},$$

d'où

$$\pm dt = \frac{\rho d\rho}{\sqrt{a\rho^2 - 2\mu\rho}};$$

donc la formule (4) s'y applique en faisant $c = 0$, et la discussion en serait semblable à celle qui précède.

QUESTIONS.

I. Déterminer le mouvement d'un point matériel repoussé par un centre fixe, en raison inverse du cube de la distance.

II. Déterminer le mouvement de deux points matériels qui se repoussent ou qui s'attirent, en raison directe de leurs masses et en raison inverse des carrés des distances; ces deux points ayant des vitesses initiales inversement proportionnelles à leurs masses, et dirigées en sens contraires, suivant deux droites parallèles entre elles.
