NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. PROUHET

Note sur la solution précédente

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 10 (1851), p. 328-330
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1851_1_10__328_1>

NOTE SUR LA SOLUTION PRÉCÉDENTE;

PAR M. E. PROUHET.

Ainsi, en résumé, si l'on suppose $\varphi(m)$ développé suivant les puissances descendantes de m, il suffira, pour obtenir S_n, de multiplier respectivement tous les termes de $\varphi(m)$ par P_{-1}, P_0, P_1, P_2, etc., en posant, pour abréger,

$$P_i = (1 - a^i)(1 - b^i)\ldots(1 - l^i);$$

mais on peut parvenir à ce résultat d'une autre manière, qui nous fera connaître en même temps une relation entre S_n et S_{n-1}.

Posons

$$\psi(p) = 1 + 2^{n-1} + 3^{n-1} + \ldots + p^{n-1},$$

on aura

$$S_{n-1} = \psi(m) - \sum a^{n-1}\psi\left(\frac{m}{a}\right) + \sum a^{n-1}b^{n-1}\psi\left(\frac{m}{ab}\right) - \ldots,$$

$$S_n = \varphi(m) - \sum a^n\varphi\left(\frac{m}{a}\right) + \sum a^n b^n\varphi\left(\frac{m}{ab}\right) - \ldots,$$

où les signes sommatoires se rapportent aux nombres premiers qui entrent dans m.

Si l'on prend la dérivée de S_n par rapport à m, en traitant a, b, etc., comme des constantes, on aura

$$\frac{dS_n}{dm} = \varphi'(m) - \sum a^{n-1}\varphi'\left(\frac{m}{a}\right) + \sum a^{n-1}b^{n-1}\varphi'\left(\frac{m}{ab}\right) - \ldots.$$

Mais on a (page 188)

$$\varphi'(p) = n\psi(p) + B_{n-1};$$

donc

$$\frac{dS_n}{dm} = n\left[\psi(m) - \sum a^{n-1}\psi\left(\frac{m}{a}\right) + \ldots\right] + B_{n-1}\left(1 - \sum a^{n-1} + \sum a^{n-1}b^{n-1} - \ldots\right),$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{dS_n}{dm} = nS_{n-1} + B_{n-1}P_{n-1};$$

d'où

(2) $$S_n = n\int_0^m S_{n-1}\,dm + B_{n-1}P_{n-1}m,$$

et il n'y a pas de constante à ajouter, puisque la formule (1) montre que S_n ne doit pas avoir de terme indépendant de m.

Mais, d'un autre côté, en posant $s_n = \varphi(m)$, on a

(3) $$s_n = n\int_0^m s_{n-1}\,dm + B_{n-1}m;$$

par où l'on voit que si l'on se sert de l'équation (2) pour calculer S_0, S_1, S_2, etc., ou de l'équation (3) pour calculer s_0, s_1, etc., le premier résultat ne différera du second que par le changement de B_0 en B_0P_0, de B_1 en B_1P_1, etc.; ce qui s'accorde avec la règle énoncée plus haut.

Nous avons donné, dans un autre article, les valeurs de $s_0, s_1, \ldots, s_n$ (p. 189); on pourra donc en déduire, sans nouveau calcul, les valeurs de S_0, S_1, ..., S_n : on aura ainsi

$$S_4 = P_{-1}\frac{m^5}{5} + P_1\frac{m^3}{3} - P_3\frac{m}{30},$$

$$S_5 = P_{-1}\frac{m^6}{6} + 5P_1\frac{m^4}{12} - P_3\frac{m^2}{12},$$

$$S_6 = P_{-1}\frac{m^7}{7} + P_1\frac{m^5}{2} - P_3\frac{m^3}{6} + P_5\frac{m}{42},$$

etc.