NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

DE POLIGNAC

De la suite médiane et des suites constantes qui tendent à se former dans les suites diatomiques

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 10 (1851), p. 308-312

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1851_1_10__308_1>

DE LA SUITE MÉDIANE ET DES SUITES CONSTANTES QUI TENDENT A SE FORMER DANS LES SUITES DIATOMIQUES

(voir t. VIII, p. 423),

PAR M. DE POLIGNAC,
Élève de l'École Polytechnique.

A cause de la symétrie des suites diatomiques, si, au lieu de partir de zéro pour former une période d'une suite diatomique, on part de $\frac{\mu . P_n}{2}$, on formera la moitié d'une période en allant jusqu'à μP_n. Désignons par a le nombre $\frac{\mu . P_n}{2}$, et considérons la suite des nombres naturels

$$\ldots a-6,\ a-5,\ a-4,\ a-3,\ a-2,\ a-1,\ a$$
$$a+1,\ a+2,\ a+3,\ a+4,\ a+5,\ a+6,\ldots.$$

Il est clair d'abord que tous les termes de la forme

$a \pm 2n + 1$ seront effacés comme nombres pairs, puisque a est impair; maintenant si j'efface (en partant de a), de 3 en 3, de 5 en 5, de 7 en 7,..., de P_n en P_n, il est clair qu'en prenant n assez grand, on effacera tous les termes de la suite précédente (jusqu'à un terme choisi arbitrairement), excepté les puissances de 2 diminuées d'une unité. On voit donc qu'il tend à se former, au milieu des suites diatomiques, une suite constante que j'appellerai *suite médiane* et qui n'est autre que les puissances successives de 2 diminuées d'une unité. On voit de plus que la suite médiane s'étend au delà de toute limite. *Les termes milieux des suites diatomiques tendent donc vers un état définitif, les puissances successives de* 2. Ils présentent le tableau suivant :

$$\ldots 255,\ 127,\ 63,\ 31,\ 15,\ 7,\ 3,\ 1,\ \underline{\bar{3}},\ 1,\ 3,\ 7,\ 15,\ 31,\ 63,\ 127,\ 255, \ldots.$$

En particulier, on remarquera que le terme milieu est 3, résultat déjà énoncé précédemment.

On peut se proposer, étant donnée une suite diatomique, de déterminer le nombre des termes de la suite médiane qui appartiennent à cette suite diatomique. Je n'ai pu jusqu'à présent résoudre cette question; toutefois il est facile d'avoir une limite inférieure du nombre cherché. En effet, ce nombre sera au moins égal à deux fois le nombre des puissances de 2 inférieures à P_n augmenté d'une unité.

Si maintenant, au lieu de $\frac{\mu P_n}{2}$ on prend le nombre $\frac{\mu P_n}{2 \cdot 3}$, on trouve qu'à partir de ce terme il se forme à droite et à gauche une suite qui n'est pas symétrique et dont le terme milieu est $\underline{5}$; désignons $\frac{\mu P_n}{2 \cdot 3}$ par b, et prenons la suite des nombres naturels :

$$\ldots\ b-3,\ b-2,\ b-1,\ b,\ b+1,\ b+2,\ b+3, \ldots,$$

tous les nombres de la forme $b + 2n + 1$ seront effacés comme nombres pairs. Maintenant il y a deux hypothèses à faire :

1°. $$b - 1 \equiv 0 \pmod{3}.$$

Dans ce cas, en effaçant de 3 en 3 à partir de $b - 1$, puis de 5 en 5, de 7 en 7,..., de P_n en P_n à partir de b, on voit que dans la portion de droite tous les nombres seront effacés, excepté ceux de la forme $b + 2^{2n}$ ou de la forme $b + 2^\alpha . 3^\beta$, et dans la portion de gauche il n'y aura de conservés que les nombres de la forme $b - 2^{2n+1}$ ou $b - 2^\alpha . 3^\beta$. En sorte que les termes de la suite considérée sont, pour la partie droite,

$$2^\alpha . 3^\beta - 2^{\alpha'} . 3^{\beta'} - 1, \text{ ou } 2^\alpha . 3^\beta - 2^{2n} - 1, \text{ ou } 2^{2n} - 2^\alpha . 3^\beta - 1,$$

et, pour la partie gauche,

$$2^\alpha . 3^\beta - 2^{\alpha'} . 3^{\beta'} - 1, \quad 2^\alpha . 3^\beta - 2^{2n+1} - 1,$$

ou

$$2^{2n+1} - 2^\alpha\, 3^\beta - 1.$$

On peut réunir ces différentes formes dans une seule formule, sauf à la discuter dans les deux cas où l'on prendrait la portion de droite ou la portion de gauche de la série; cette formule est

$$2^\alpha . 3^{\beta'} (\pm 2^{\alpha - \alpha'} . 3^{\beta - \beta'} \mp 1)\, 1.$$

Si l'on se donne α et β, α' et β' sont déterminés. Supposons d'abord que β ne soit pas nul; alors, si la valeur de β' n'est pas nulle non plus, le terme trouvé pour la portion de droite se trouvera aussi dans la portion de gauche de la série. Admettons encore que $\beta > 0$; alors, si $\beta' = 0$, la formule pour représenter un terme de droite devra être telle que $\alpha' = 2k$, et pour un terme de gauche $\alpha' = 2k' + 1$. Enfin, si $\beta = 0$, pour un terme de droite on aura $\alpha = 2k$, et pour un terme de gauche $\alpha = 2k + 1$.

β et β' ne peuvent être nuls à la fois; quant aux exposants α et α', aucun d'eux ne peut être nul.

2°. $$(b+1) \equiv 0 \pmod{3}.$$

Il est aisé de voir dans ce cas que la partie gauche devient la partie droite, et *vice versâ*; c'est là le seul changement qui ait lieu.

La suite qui se forme autour de $\frac{\mu P_n}{2.3}$ ne change pas indéfiniment avec P_n; comme la suite médiane, elle tend vers un état constant, seulement elle peut changer de sens, c'est-à-dire que les termes qui se trouvaient à gauche de $\frac{\mu P_n}{2.3}$ peuvent se trouver à droite de $\frac{\mu P_{n'}}{2.3}$, et *vice versâ*. Ainsi la suite est constante, par rapport à la valeur des termes, et elle n'admet que deux états en considérant leur disposition. Dans tous les cas, l'inspection seule de la forme $\frac{\mu P_n}{2.3}$, par rapport à 3, suffira pour marquer si l'on a un de ces états ou l'autre.

On peut observer que si l'on écrit les deux états de la suite l'un au-dessous de l'autre, de manière que les deux termes milieux $\underline{5}$ se trouvent sur une même colonne verticale, et si l'on additionne terme à terme, on obtiendra évidemment une suite symétrique.

Généralisons ces considérations. Dans toute suite diatomique il se forme, autour de $\frac{\mu P_n}{1.2.3\ldots\ldots P_k}$, une suite de termes dont les valeurs ne dépendent pas de la grandeur de P_n (on suppose que P_k reste constant, et qu'on fasse croître P_n), mais de la forme de μP_n, par rapport à P_k, P_{k-1},..., 5, 3. On voit donc que le nombre des séries fixes qui se forment autour de $\frac{\mu P_n}{2.3,\ldots, P_n}$ est limité; de plus on voit qu'à chaque série il en correspond une autre telle, qu'en les ajoutant terme à terme, on a une série symétrique. Par conséquent, la somme de toutes les séries sera aussi symétrique.

Je me propose, dans un autre article, de parler des propriétés de ces suites constantes qui, on le voit, tendent à se former dans les suites diatomiques, et nous permettent de découvrir de loin en loin, dans ces suites, des groupes de termes connus, sans qu'il soit besoin de former les suites diatomiques elles-mêmes.