

TILLOL

**Note sur les sections circulaires dans
les surfaces du second degré**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 10
(1851), p. 304-308

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1851_1_10__304_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1851, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**NOTE SUR LES SECTIONS CIRCULAIRES DANS LES SURFACES
DU SECOND DEGRÉ;**

PAR M. TILLOL, professeur à Castres.

Cette Note a pour but de rendre la recherche des sections circulaires indépendante de la transformation d'axes dans le plan de la section.

Soient $F = 0$ l'équation de la surface; $f = 0$, $f_1 = 0$ les équations de deux plans qui la coupent. L'équation

$$F + \lambda f f_1 = 0$$

représente une surface passant par les points d'intersection de la surface $F = 0$ avec chacun des plans $f = 0$, $f_1 = 0$; dès lors, si l'équation

$$F + \lambda f f_1 = 0$$

peut devenir celle d'une sphère, il sera établi que la surface admet des sections circulaires, et les équations $f = 0$, $f_1 = 0$ en détermineront la direction.

Soient

$$F = Px^2 + P'y^2 + P''z^2 + Qx + Q'y + Q''z + E = 0,$$

l'équation de la surface dans laquelle P , P' , P'' , Q , ... peuvent admettre des valeurs numériques et des signes quelconques, et

$$f = ax + by + cz + d = 0, \quad f_1 = a'x + b'y + c'z + d' = 0,$$

les équations des deux plans; l'équation de la surface auxiliaire sera

$$Px^2 + P'y^2 + P''z^2 + Qx + Q'y + Q''z + E + \lambda(ax + by + cz + d)(a'x + b'y + c'z + d') = 0,$$

ou, en développant,

$$\begin{aligned} & (P + \lambda aa')x^2 + (P' + \lambda bb')y^2 + (P'' + \lambda cc')z^2 \\ & + \lambda[(ab' + ba')xy + (ac' + ca')xz + (bc' + cb')yz] \\ & + [Q + \lambda(ad' + da')]x + [Q' + \lambda(bd' + db')]y \\ & + [Q'' + \lambda(cd' + dc')]z + E + \lambda dd' = 0. \end{aligned}$$

Pour que cette équation représente une sphère, en supposant les axes rectangulaires, il suffit de poser

$$\begin{aligned} P + \lambda aa' &= P' + \lambda bb' = P'' + \lambda cc', \\ ab' + ba' &= 0, \quad ac' + ca' = 0, \quad bc' + cb' = 0. \end{aligned}$$

Ce dernier système peut être vérifié de plusieurs manières. Posons d'abord

$$a = a' = 0;$$

les équations de condition deviendront, dans cette hypothèse,

$$P = P' + \lambda bb' = P'' + \lambda cc', \quad bc' + cb' = 0;$$

d'où

$$\frac{cc'}{bb'} = \frac{P - P''}{P - P'},$$

et, à cause de $\frac{c}{b} = -\frac{c'}{b'}$,

$$\frac{c^2}{b^2} = -\frac{cc'}{bb'} = \frac{P'' - P}{P - P'},$$

d'où enfin

$$\frac{c}{b} = \sqrt{\frac{P'' - P}{P - P'}}, \quad \frac{c'}{b'} = -\sqrt{\frac{P'' - P}{P - P'}}.$$

Les équations

$$f = 0, \quad f_1 = 0,$$

deviendront, dans ce cas,

$$(1) \quad \begin{cases} y + z \sqrt{\frac{P'' - P}{P - P'}} + \frac{d}{b} = 0, \\ y - z \sqrt{\frac{P'' - P}{P - P'}} + \frac{d'}{b'} = 0; \end{cases}$$

de même, les conditions $b = b' = 0$, $c = c' = 0$, donnent

$$(2) \quad \begin{cases} x + y \sqrt{\frac{P' - P''}{P'' - P}} + \frac{d}{a} = 0, \\ x - y \sqrt{\frac{P' - P''}{P'' - P}} + \frac{d'}{a'} = 0, \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} z + x \sqrt{\frac{P - P'}{P' - P''}} + \frac{d}{c} = 0, \\ z - x \sqrt{\frac{P - P'}{P' - P''}} + \frac{d'}{c'} = 0. \end{cases}$$

Il résulte de ces six équations que les surfaces du second degré admettent, dans six directions différentes, des sections circulaires (réelles ou imaginaires) et parallèles à l'un des axes principaux de la surface; de là aussi un théorème remarquable de Hachette, savoir que *deux cercles quelconques appartenant à des séries différentes sont toujours situés sur une même sphère*.

Si l'on part de l'équation plus simple

$$P x^2 + P' y^2 + P'' z^2 = + H,$$

dans laquelle on a les relations

$$H > 0, \quad \text{et} \quad P > P' > P'',$$

on voit que dans le cas de l'ellipsoïde, le système (3) est seul réel, ce qui indique que les sections circulaires sont parallèles à l'axe moyen.

Dans l'hyperboloïde à une nappe, $P'' < 0$, le système (3) est seul réel, et les sections sont parallèles au plus grand des axes réels.

Dans le cas de l'hyperboloïde à deux nappes, P' et P'' sont négatifs, le système (3) est seul réel, et les sections sont parallèles au plus grand des axes imaginaires.

Les équations de condition étant indépendantes des coefficients Q, Q', Q'', \dots, E , les plans qui déterminent les sections circulaires dans les hyperboloïdes les déterminent aussi dans le cône asymptote. Une section d'une série peut être regardée comme la base du cône, l'autre comme une section anti-parallèle.

Dans le cas des paraboloides, l'équation en coordonnées rectangles peut toujours prendre la forme

$$P'y^2 + P''z^2 - Qx = 0,$$

P' et P'' étant de mêmes signes dans le paraboloides elliptique, et de signe contraire dans le paraboloides hyperbolique. Dans le premier cas, on peut avoir

$$P' > P'', \text{ ou } P' < P'',$$

d'où

$$x + y \sqrt{\frac{P' - P''}{P''}} + \frac{d}{a} = 0, \quad x - y \sqrt{\frac{P' - P''}{P''}} + \frac{d'}{a'} = 0,$$

et

$$z + x \sqrt{\frac{P'}{P'' - P'}} + \frac{d}{c} = 0, \quad z - x \sqrt{\frac{P'}{P'' - P'}} + \frac{d'}{c'} = 0;$$

dans ce cas il y aura deux séries de plans perpendiculaires à celui des xy et des xz . Si $P' = P''$, il n'y aura plus qu'une série de plans perpendiculaires à l'axe du paraboloides.

Dans le paraboloides hyperbolique, on a

$$P' > 0 \text{ et } P'' < 0;$$

les équations des plans deviennent alors

$$y + z \sqrt{\frac{P''}{P'}} + \frac{d}{b} = 0, \quad y - z \sqrt{\frac{P''}{P'}} + \frac{d'}{b'} = 0;$$

elles paraissent indiquer deux séries de sections circulaires. Mais l'élimination successive de y et de z entre ces équations et l'équation

$$P' y^2 - P'' z^2 - Q x = 0,$$

conduisant à deux équations du premier degré, il s'ensuit que les projections de l'intersection sur les plans des xz et des yz sont du premier degré, et que par suite les intersections sont des lignes droites.

(*Extrait d'un ouvrage inédit.*)