NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Note sur une certaine équation numérique du sixième degré

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 10 (1851), p. 275-277

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1851_1_10__275_0>

NOTE SUR UNE CERTAINE ÉQUATION NUMÉRIQUE DU SIXIÈME DEGRÉ;

PAR M. A.-J.-H. V.

A la page 89 du tome X (mars 1851) des *Nouvelles Annales*, M. Prouhet démontre la non-réalité des racines de deux équations empruntées au Mémoire d'un illustre astronome.

Je vais appliquer au second des deux exemples (celui du sixième degré) la méthode Budan-Fourier, telle qu'elle a été modifiée dans le Journal de M. Liouville et dans les Mémoires de la Société des Sciences, etc., de Lille. (L'exemple du quatrième degré est trop facile pour nous arrêter.)

Toute la démonstration résulte de l'inspection du tableau suivant, dont je vais expliquer la formation et les conséquences.

A	B	C	D	E	F	G
+5602	−11596	+29193	−25857	+22430	−14560	+3447
+8659	+ 6821	− 7693	−12797	+ 1335	+ 6122	+3447
+	+	+	+	+	+	+
+3447	−14560	+22430	−25857	+29193	−11596	+5602
+	+	+	+	+	+	+
+3447	+ 6122	+ 1335	−12797	− 7693	+ 6821	+8659
+	+	+	+	+	+	+

La ligne première contient les coefficients de l'équation proposée pris à rebours, et changés de signe de deux en deux, parce qu'il n'y a lieu de chercher que des racines négatives.

La ligne deuxième est formée par l'algorithme suivant.

Si l'on nomme A, B, C, D, etc., les nombres de la première ligne, et A′, B′, C′, etc., ceux de la seconde, on a

$$
\begin{array}{llllllll}
A' = & A + & B + & C + & D + & E + & F + & G \\
B' = & & B + & 2C + & 3D + & 4E + & 5F + & 6G \\
C' = & & & C + & 3D + & 6E + & 10F + & 15G \\
D' = & & & & D + & 4E + & 10F + & 20G \\
E' = & & & & & E + & 5F + & 15G \\
F' = & & & & & & F + & 6G \\
G' = & & & & & & & G
\end{array}
$$

tous calculs de la plus grande simplicité, de la dernière facilité, d'une absolue généralité.

Les nombres de la troisième ligne, sous-entendus parce que l'on n'a besoin que de leurs signes, et que ces signes sont tous des $+$, seraient formés des nombres de la deuxième ligne, par le même algorithme qui a servi à tirer ceux-ci des nombres de la première ligne.

Cette première partie du calcul achevée, j'en conclus que les racines cherchées, supposées réelles, sont nécessairement comprises, quatre au plus entre 0 et -1, et deux au plus entre -1 et -2, autant que de variations perdues en passant de chaque ligne à la suivante.

Je passe à la seconde partie du calcul. La quatrième ligne se compose des nombres de la première ligne pris à rebours. (Ce sont donc les coefficients de l'équation.)

La cinquième ligne se tirerait de la quatrième au moyen de l'algorithme; mais un coup d'œil suffit pour reconnaître qu'il n'y aurait que des signes $+$.

Donc, 1° les quatre racines supposées entre 0 et -1, sont toutes les quatre imaginaires.

La sixième ligne se compose des nombres de la deuxième ligne pris à rebours; la septième se tirerait de la sixième par l'algorithme; mais on aperçoit sur-le-champ que l'on n'aurait que des $+$.

Donc, 2° les deux racines supposées entre -1 et -2, sont imaginaires.

Donc, enfin, les six racines sont imaginaires.

N'est-il pas surprenant qu'une méthode de séparation des racines aussi simple, aussi facile, aussi générale, n'ait pas obtenu la moindre mention des savants auteurs qui se sont occupés, dans ces derniers temps, de la théorie des équations (*).