

ARMAND HUE

Solution de la question 52

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 10
(1851), p. 25-27

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1851_1_10__25_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1851, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 52

(voir t. I, p. 520);

PAR M. ARMAND HUE,
Professeur d'hydrographie à Bayonne.

La question doit être rectifiée de la manière suivante :
 a , b , c étant les trois côtés d'un triangle sphérique, et
 e l'excès sphérique, on a

$$\begin{aligned} 1 + \cos 2a + \cos 2b + \cos 2c + 32 \cos^2 \frac{a}{2} \cos^2 \frac{b}{2} \cos^2 \frac{c}{2} \sin^2 \frac{e}{2} \\ = \cos(a + b + c) + \cos(a + b - c) + \cos(a + c - b) \\ + \cos(b + c - a). \end{aligned}$$

Démonstration. On a d'abord, comme on sait,

$$e = A + B + C - 180^\circ,$$

d'où

$$\sin \frac{e}{2} = -\cos \frac{A+B+C}{2}.$$

Développant $\cos \frac{A+B+C}{2}$ à l'aide des formules connues (Delambre),

$$\sin \frac{A+B}{2} = \cos \frac{C}{2} \cdot \frac{\cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{c}{2}}, \quad \cos \frac{A+B}{2} = \sin \frac{C}{2} \cdot \frac{\cos \frac{a+b}{2}}{\cos \frac{c}{2}},$$

il vient

$$\sin \frac{e}{2} = \frac{\sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}}{\cos \frac{c}{2}} \left(\cos \frac{a-b}{2} - \cos \frac{a+b}{2} \right);$$

d'où l'on tire

$$\sin \frac{c}{2} \cos \frac{c}{2} = \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \sin C,$$

et, par suite,

$$(1) \quad \sin^2 \frac{e}{2} \cos^2 \frac{c}{2} = \sin^2 \frac{a}{2} \sin^2 \frac{b}{2} \sin^2 C.$$

Exprimons $\sin^2 C$ en fonction des côtés du triangle; nous aurons

$$\begin{aligned} \sin^2 C &= 1 - \cos^2 C = 1 - \frac{(\cos c - \cos a \cos b)^2}{\sin^2 a \sin^2 b} \\ &= \frac{(1 - \cos^2 a)(1 - \cos^2 b) - \cos^2 c - \cos^2 a \cos^2 b + 2 \cos a \cos b \cos c}{\sin^2 a \sin^2 b} \\ &= \frac{1 + 2 \cos a \cos b \cos c - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c}{\sin^2 a \sin^2 b} \\ &= \frac{4 \cos a \cos b \cos c - \cos 2a - \cos 2b - \cos 2c - 1}{32 \sin^2 \frac{a}{2} \sin^2 \frac{b}{2} \cos^2 \frac{a}{2} \cos^2 \frac{b}{2}}. \end{aligned}$$

(27)

Portant cette valeur dans l'équation (1), et réduisant, on obtient

$$\begin{aligned} 1 + \cos 2a + \cos 2b + \cos 2c + 32 \cos^2 \frac{a}{2} \cos^2 \frac{b}{2} \cos^2 \frac{c}{2} \sin^2 \frac{e}{2} \\ = 4 \cos a \cos b \cos c = 2 \cos(a+b) \cos c + 2 \cos(a-b) \cos c \\ = \cos(a+b+c) + \cos(a+b-c) + \cos(a+c-b) \\ + \cos(b+c-a). \end{aligned}$$