NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Sur un certain système d'équations du premier degré ; d'après M. Jacobi

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 10 (1851), p. 258-265

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1851_1_10__258_0>

SUR UN CERTAIN SYSTÈME D'ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ;

D'APRÈS M. JACOBI (*).

(Journal de M. Crelle, t. XXX, p. 51-94; 1846.)

1. Soit le système suivant de n équations linéaires entre les n inconnues α, β, γ,..., π :

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} a'_1\alpha + a'_2\beta + a'_3\gamma + \ldots + a'_n\pi = t\alpha, \\ a''_1\alpha + a''_2\beta + \ldots\ldots\ldots + a''_n\pi = t\beta, \\ \vdots \\ a^{(n)}_1\alpha + a^{(n)}_2\beta + \ldots\ldots\ldots + a^{(n)}_n\pi = t\pi. \end{array}\right.$$

On suppose qu'on a la relation

$$(2)\qquad a^{(p)}_q = a^{(q)}_p,$$

p et q étant des nombres de la suite 1, 2, 3,..., n.

On a n équations entre les $n-1$ rapports $\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{\gamma}{\alpha}$,..., $\frac{\pi}{\alpha}$; éliminant ces rapports, on obtient, comme on sait, une équation en t, de degré n.

Soient t_1, t_2,..., t_n, les n racines de cette équation. Substituant successivement ces racines dans $n-1$ quelconques des équations du système (1), on aura n systèmes de valeurs, pour les $n-1$ rapports. Si l'on pose, de plus,

$$(3)\qquad \alpha^2 + \beta^2 + \ldots + \pi^2 = 1,$$

$\frac{1}{\alpha^2}$ sera une quantité connue; donc α sera connu, de même β, etc. Ainsi, à l'aide de l'équation (3), les n

(*) On lit l'extrait d'un beau Mémoire de M. Sturm, sur le même sujet, dans le Bulletin de Férussac (*Mathématiques*, t. XII, p. 316; 1829).

systèmes de valeurs des inconnues seront complétement déterminés.

2. Désignons par $\alpha^{(p)}$, $\beta^{(p)}$,..., $\pi^{(p)}$, les valeurs des inconnues qui correspondent à la racine t_p; (p) désigne un nombre d'accents.

Les équations (1) donnent donc

$$\begin{aligned}
a'_1\alpha' + a'_2\beta' + \ldots + a'_n\pi' &= t_1\alpha',\\
a''_1\alpha' + a''_2\beta' + \ldots + a''_n\pi' &= t_1\beta',\\
&\vdots\\
a^{(n)}_1\alpha' + a^{(n)}_2\beta' + \ldots + a^{(n)}_n\pi' &= t_1\pi'.
\end{aligned}$$

Si l'on additionne ces équations après avoir multiplié la première par α'', la seconde par β'',..., la dernière par π'', le coefficient de α', dans le membre à gauche, sera $a'_1\alpha'' + a''_1\beta'' + \ldots a^{(n)}_1\pi''$; et, d'après la relation (2), cette expression est la même que

$$a'_1\alpha'' + a'_2\beta'' + a'_3\gamma'' + \ldots + a'_n\pi'';$$

mais c'est ce que devient le membre à gauche de la première des équations (1), pour la racine t_2 : donc le coefficient de α' est $t_2\alpha''$. On prouve de même que le coefficient de β' devient $t_2\beta''$, et ainsi des autres; donc on a

$$\begin{aligned}
&t_2(\alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' + \ldots + \pi'\pi'')\\
&= t_1(\alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \ldots \pi'\pi'').
\end{aligned}$$

Et lorsque t_1 n'est pas égal à t_2, on a

$$(4)\qquad \alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \ldots + \pi'\pi'' = 0.$$

Cette relation montre, selon l'observation de M. Cauchy (*), que toutes les racines de l'équation en t sont réelles.

En effet, soient t_1, t_2, deux racines imaginaires *conju-*

(*) Ce mode de démonstration a déjà été employe par Lagrange (*Méc. anal.*, t. II, p. 248; 2e édit.)

guées, les rapports $\frac{\beta'}{\alpha'}$ et $\frac{\beta''}{\alpha''}$, $\frac{\gamma'}{\alpha'}$, $\frac{\gamma''}{\alpha''}$, etc., qui sont des fonctions rationnelles de t, auront aussi des valeurs imaginaires conjuguées. Ainsi les produits $\frac{\beta'\beta''}{\alpha'\alpha''}$, $\frac{\gamma'\gamma''}{\alpha'\alpha''}$, seront chacun la somme de deux carrés, ce qui rendrait impossible la relation (4); donc, etc.

3. Considérons les n équations linéaires suivantes :

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{l} p_1 = \alpha' q_1 + \alpha'' q_2 + \ldots + \alpha^{(n)} q_n, \\ p_2 = \beta' q_1 + \beta'' q_2 + \ldots + \beta^{(n)} q_n, \\ \vdots \\ p_n = \pi' q_1 + \pi'' q_2 + \ldots + \pi^{(n)} q_n; \end{array}\right.$$

α', α'', etc., ayant la même signification que ci-dessus.

Si l'on additionne les carrés de ces expressions, et que l'on ait égard aux relations (3) et (4), on obtient

$$(6)\quad p_1^2 + p_2^2 + \ldots + p_n^2 = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + \ldots + q_n^2.$$

Additionnant ces équations, après avoir multiplié la première par α', la deuxième par β',..., et la dernière par π', on trouve

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{l} q_1 = p_1\alpha' + p_2\beta' + \ldots + p_n\pi', \\ \quad\text{et, de même,} \\ q_2 = p_1\alpha'' + p_2\beta'' + \ldots + p_n\pi'', \\ \vdots \\ q_n = p_1\alpha^{(n)} + p_2\beta^{(n)} + \ldots + p_n\pi^{(n)}. \end{array}\right.$$

Substituant ces valeurs dans la première des équations (5), on trouve

$$\begin{array}{l} p_1 = [(\alpha')^2 + (\alpha'')^2 + \ldots + (\alpha^{(n)})^2]p_1, \\ \qquad [\alpha'\beta' + \alpha''\beta'' + \ldots + \alpha^{(n)}\beta^{(n)}]p_2, \\ \qquad \vdots \\ \qquad [\alpha'\pi' + \alpha''\pi'' + \ldots + \alpha^{(n)}\pi^{(n)}]p_n; \end{array}$$

et, à cause de l'indépendance de $p_1, p_2, \ldots, p_n$, on a

$$(8)\qquad (\alpha')^2 + (\alpha'')^2 + \ldots + (\alpha^{(n)})^2 = 1,$$

$$(9)\qquad \left\{\begin{array}{l} \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' + \ldots + \alpha^{(n)}\beta^{(n)} = 0, \\ \alpha'\gamma' + \alpha''\gamma'' + \ldots + \alpha^{(n)}\gamma^{(n)} = 0, \\ \vdots \\ \alpha'\pi' + \alpha''\pi'' + \ldots + \alpha^{(n)}\pi^{(n)} = 0. \end{array}\right.$$

On trouve des équations analogues pour β', γ', etc.

4. La première des équations (1) donne

$$t_1\alpha' = a'_1\alpha' + a'_2\beta' + \ldots + a'_n\pi',$$
$$t_2\alpha'' = a'_1\alpha'' + a'_2\beta'' + \ldots + a'_n\pi'',$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si l'on additionne ces n équations, après avoir multiplié la première par α', la deuxième par α'', etc., en ayant égard aux équations (8) et (9), on obtient

$$t_1\alpha'^2 + t_2\alpha''^2 + \ldots + t_n\alpha^{(n)2} = a'_1,$$

et, de même,

$$t'_1\alpha'\beta' + t_2\alpha''\beta'' + \ldots + t_n\alpha^{(n)}\beta^{(n)} = a'_2;$$

et encore $n - 2$ relations semblables pour γ, δ, ..., π. Faisant usage de ces n relations, on déduit des équations (7),

$$(10)\qquad \left\{\begin{array}{l} t_1 q_1^2 + t_2 q_2^2 + \ldots + t_n q_n^2 \\ = a'_1 p_1^2 + 2a''_1 p_1 p_2 + 2a'''_1 p_1 p_3 + \ldots \\ \qquad\qquad a''_2 p_2^2 + 2a'''_2 p_2 p_3 \\ \qquad\qquad\qquad + a'''_3 p_3^2 \\ \qquad\qquad\qquad + \ldots. \end{array}\right.$$

La loi est évidente. On forme le carré de

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n;$$

à chaque terme $p_r\, p_s$ on donne pour coefficient $2a_r^{(s)}$, et au terme $(p_r)^2$ le coefficient $a_r^{(r)}$.

Formules générales de correction pour les valeurs des inconnues.

5. Supposons que les coefficients a_1, a'_2, etc., des inconnues varient de quantités finies, mais assez petites pour qu'on puisse négliger les puissances des variations supérieures à la première puissance. Il s'agit de déterminer les variations correspondantes des inconnues.

Soient $\Delta a_r^{(s)}$ la variation du coefficient $a_r^{(s)}$, et Δt_1, $\Delta\alpha'$ les variations correspondantes de t_1 et α'. Les équations (1) donnent :

$$(11)\quad\left\{\begin{array}{l}\alpha'\Delta t_1-(\alpha'\Delta a'_1+\beta'\Delta a''_1+\gamma'\Delta a'''_1+\ldots)\\ =[(a'_1-t_1)\Delta\alpha'+a'_1\Delta\beta'+a''_1\Delta\gamma'+\ldots];\\ \beta'\Delta t_1-[a'\Delta(a''_1)+\beta'\Delta a''_2+\gamma'\Delta a''_3+\ldots]\\ =a''_1\Delta\alpha'+(a''_2-t_1)\Delta\beta'+a''_3\Delta\gamma'+\ldots\\ \text{etc.}\end{array}\right.$$

Ajoutant ces équations, multipliées la première par α', la deuxième par β', la troisième par γ', etc., on obtient, d'après les relations données ci-dessus,

$$(12)\quad\left\{\begin{array}{r}\Delta t_1=\alpha'^2\Delta\alpha'_1+2\alpha'\beta'\Delta a'_2+2\alpha'\gamma'\Delta a'_3+2\alpha'\delta'\Delta a'_4+\ldots\\ \beta'^2\Delta a''_2+2\beta'\gamma'\Delta a''_3+2\beta'\delta'\Delta a''_4+\ldots\\ \gamma^2\Delta a'''_3+2\gamma\delta'\Delta a'''_4+\ldots\\ \delta'^2\Delta a^{\text{iv}}_4+\ldots\\ \text{etc.}\end{array}\right.$$

La loi est évidente. On a donc Δt_1 en fonction des augmentations des coefficients. Ajoutant aux deux membres des équations (11) $(t_1-t_2)\,\Delta\alpha'$ à la première, $(t_1-t_2)\,\Delta\beta'$ à la seconde, $(t_1-t_2)\,\Delta\gamma'$ à la troisième, et ainsi de suite, et puis additionnant ces équations, après avoir multiplié la première par α'', la deuxième par β'', et la troisième par γ'', etc., on obtient

$$\begin{array}{l}(t_1-t_2)\,(\alpha''\Delta\alpha'+\beta''\Delta\beta'+\gamma''\Delta\gamma'+\ldots)\\ =\alpha''\alpha'\Delta a'_1+(\alpha''\beta'+\alpha'\beta'')\Delta a'_2+\beta''\beta'\Delta a''_2+\ldots;\end{array}$$

et, de même,

$$(t_1 - t_3)(\alpha'''\Delta\alpha' + \beta'''\Delta\beta' + \gamma'''\Delta\gamma' + \ldots)$$
$$= \alpha'''\alpha'\Delta a'_1 + (\alpha'''\beta' + \alpha'\beta''')\Delta a'_2 + \beta'''\beta'\Delta a'_2 + \ldots$$

On a ainsi $n - 1$ équations entre les n variations $\Delta\alpha'$, $\Delta\beta'$,etc.; à quoi il faut ajouter la n^{ieme} équation déduite de l'équation (3),

$$\alpha'\Delta\alpha' + \beta'\Delta\beta' + \gamma'\Delta\gamma' + \ldots = 0.$$

Multipliant les $n - 1$ équations respectivement, la première par $\dfrac{\alpha''}{t_1 - t_2}$, la deuxième par $\dfrac{\alpha'''}{t_1 - t_3}$, etc., et la n^{ieme} équation par α', et les ajoutant, les grandeurs $\Delta\beta'$, $\Delta\gamma'$, etc., seront, en vertu des relations (9), simultanément éliminées, et l'on obtient

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} &\Delta\alpha' = \alpha'\left(\frac{\alpha''^2}{t_1 - t_2} + \frac{\alpha'''^2}{t_1 - t_3} + \ldots\right)\Delta a'_1 \\ &+ \left[\beta'\left(\frac{\alpha''^2}{t_1 - t_2} + \frac{\alpha'''^2}{t_1 - t_3} + \ldots\right) + \alpha'\left(\frac{\alpha''\beta''}{t_1 - t_2} + \frac{\alpha'''\beta'''}{t_1 - t_3} + \ldots\right)\right]\Delta a'_2 \\ &+ \beta'\left(\frac{\alpha''\beta''}{t_1 - t_2} + \frac{\alpha'''\beta'''}{t_1 - t_3} + \ldots\right)\Delta a''_2 + \ldots \end{aligned}\right.$$

Les équations (12) et (13) donnent donc les coefficients différentiels exacts,

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{dt_1}{da'_1} = \alpha'^2; \qquad \frac{dt_1}{da'_2} = 2\alpha'\beta'; \cdots; \\ &\frac{d\alpha'}{d\alpha'_1} = \alpha'\left(\frac{\alpha''^2}{t_1 - t_2} + \frac{\alpha'''^2}{t_1 - t_3} + \ldots\right); \\ &\frac{d\alpha'}{da'_1} = \beta'\left(\frac{\alpha''\beta''}{t_1 - t_2} + \frac{\alpha'''\beta'''}{t_1 - t_3} + \ldots\right); \\ &\frac{d\alpha'}{da'_2} = \frac{\beta'}{\alpha'}\frac{d\alpha'}{da'_1} + \frac{\alpha'}{\beta'}\frac{d\alpha'}{da''_2}; \\ &\frac{d\alpha'}{da'''_2} = \frac{\gamma'}{\beta'}\frac{d\alpha'}{da''_2} + \frac{\beta'}{\gamma'}\frac{d\alpha'}{da'''_3}. \\ &\text{etc.} \end{aligned}\right.$$

Par des mutations convenables, ces élégantes formules donnent les premiers coefficients différentiels de toutes les inconnues des n systèmes pris par rapport aux coefficients du système donné (1). On voit que les premiers coefficients différentiels des n racines t_1, $t_2, \ldots, t_n$ sont donnés immédiatement par les valeurs des inconnues, et que les coefficients différentiels des inconnues $\alpha^{(i)}$, $\beta^{(i)}$, pris d'après les coefficients du système (1), peuvent se calculer aisément, seulement à l'aide des coefficients différentiels pris d'après a'_1, a''_2, a'''_3, et entre lesquels existe même la relation $\alpha' \frac{d\alpha'}{da''_2} = \beta' \frac{d\beta'}{da'_1}$; les premiers coefficients différentiels de α', β', etc., donnent les seconds coefficients différentiels des racines t_1, t_2, etc. Si les incréments $\Delta a'_2$ et $\Delta a''_1$ ne sont pas égaux, alors il faut remplacer dans l'équation (12) $\Delta a'_2$ par $\frac{1}{2}(\Delta a'_2 + \Delta a''_1)$, et, dans l'équation (13), il faut dans ce qui multiplie $\Delta a'_2$, multiplier la première partie par $\Delta a'_2$ et la seconde par $\Delta a''_1$.

Application astronomique.

6. Le but du présent Mémoire n'est pas purement analytique; mais l'illustre auteur s'est proposé de fournir un procédé simple de résoudre *numériquement* les équations qui se présentent dans la théorie des perturbations séculaires (Laplace, *Mécanique céleste,* liv. II, § 55). On lit en cet endroit du Mémoire de Jacobi sept équations différentielles du premier degré, relatives aux sept orbites de Mercure, Vénus, la Terre, Mars, Jupiter, Saturne et Uranus. L'intégration fournit sept équations du premier degré, à huit inconnues, ayant la forme des équations du système (1). A l'aide d'ingénieuses transformations, on obtient des équations dont les coefficients satisfont à la relation (2); les données numériques sont empruntées au

beau travail de M. Le Verrier sur le même sujet (*Additions à la Connaissance des Temps* pour l'année 1843). Les calculs, très-nombreux, ont été exécutés par M. Louis Seidel, de Munich, élève de Jacobi. Les résultats comparés montrent que le procédé de Jacobi est beaucoup plus exact que celui dont M. Le Verrier a fait usage (*voyez* pages 90, 91 et 92 du Mémoire allemand). Dans l'absence si regrettable d'un journal d'Astronomie, M. Liouville, Membre du Bureau des Longitudes, suppléerait, autant que faire se peut, à une lacune si honteuse pour le pays, en insérant *in extenso* le Mémoire de l'illustre Prussien, et d'autres travaux analogues, dans son précieux Recueil destiné aussi aux mathématiques appliquées (*).