NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. GUILMIN

Nombres premiers relatifs

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 10 (1851), p. 23-25

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1851_1_10__23_1>

NOMBRES PREMIERS RELATIFS

(voir t. I, p. 466 ; t. IV, p. 77),

PAR M. A. GUILMIN,
Professeur.

PROBLÈME. *Trouver combien il y a de nombres premiers avec un nombre* N *et moindres que* N.

Lemme I. Sil y a K nombres prémiers avec un nombre A et moindres que A, il y a mK nombres premiers avec A et moindres que m.A.

En effet, A′ étant un nombre quelconque moindre que A, pour que nA + A′ soit premier avec A, il faut et il suffit que A′ soit premier avec A. Par suite, entre deux multiples consécutifs de A, nA et $(n+1)$A, il y a K nombres premiers avec A. Or, par hypothèse, de o à A il y a K nombres premiers avec A: de o à 2A il y en a donc 2K, de o à 3A il y en a 3K,..., de o à mA il y en a mK.

Lemme II. A étant un nombre quelconque, et p un nombre premier absolu qui ne divise pas A, s'il y a K nombres premiers avec A et moindres que A, il y a $K(p-1)$ nombres premiers avec A.p et moindres que Ap.

En effet, d'après le lemme I, il y a Kp nombres premiers avec A et moindres que Ap; parmi ces Kp nombres, il nous faut supprimer les multiples de p premiers avec A et moindres que $A \times p$. Or, pour qu'un multiple $n \times p$ de p, soit premier avec A et moindre que A, il faut et il suffit que n soit premier avec A et moindre que A. Il nous suffit donc, pour obtenir les multiples en question, de multiplier successivement p par les K nombres qui sont premiers avec A et moindres que A. Si parmi les Kp nombres, ci-dessus indiqués, premiers avec A et moindres que $A \times p$, on supprime ces K multiples de p, il reste $Kp - K = K(p-1)$ nombres premiers avec $A \times p$ et moindres que $A \times p$.

Nous allons maintenant résoudre le problème proposé.

Décomposons N en ses facteurs premiers, et soit

$$N = a^n b^p c^q \ldots.$$

Tout nombre premier avec N est premier avec abc, et réciproquement; de sorte qu'il nous suffit de chercher combien il y a de nombres premiers avec abc et moindres que $N = abc \times a^{n-1} b^{p-1} c^{q-1} \ldots$

Supposons qu'il y ait K nombres premiers avec abc et moindres que abc; il y aura $Ka^{n-1} b^{p-1} c^{q-1}$ nombres premiers avec abc et moindres que N (lemme I) ; il nous faut trouver K.

Il y a $a - 1$ nombres premiers avec a et moindres que a, savoir $1, 2, 3, \ldots, a-1$. Il y a donc $(a-1)(b-1)$ nombres premiers avec ab et moindres que ab (lemme II) ; il y a $(a-1)(b-1)(c-1)$ nombres premiers avec abc et moindres que abc.

$K = (a-1)(b-1)(c-1)$, et, par suite, le nombre demandé relatif à N est donc

$$(a-1)(b-1)(c-1)a^{n-1}b^{p-1}c^{q-1}.$$

Note. Voir Gauss, *Disquisitiones*, § 38. Nous donnerons prochainement une formule, consignée dans Crelle, pour trouver la somme d'une fonction symétrique des nombres premiers à A et moindres que A. O. T.