TERQUEM

Résolution numérique des équations trinômes, d'après M. Gauss

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 10 (1851), p. 165-174

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1851_1_10__165_1>

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS TRINOMES, D'APRÈS M. GAUSS.

1. Le Mémoire de l'illustre analyste porte pour titre : *Beitrage zur theorie der. algebraïschen gleichungen; von* Carl Friedric Gauss; Supplément à la Théorie des équations algébriques. Gottingue, 1849, 1 vol. in-4° de 34 pages. Extrait du tome IV des *Mémoires de l'Académie royale des Sciences de Gottingue.*

Ce travail est divisé en deux parties : la première contient la démonstration du principe fondamental de la théorie des équations, que l'auteur a donnée en 1799, et qu'il reproduit sous une nouvelle forme, avec des additions considérables. Cette démonstration est connue en France sous le nom de *Théorème de M. Cauchy,* qui a donné en effet une grande extension à la théorie de M. Gauss. C'est le sujet d'une belle thèse de M. Prouhet (voir *Nouvelles Annales,* tome I, page 438).

2. La seconde partie, la seule qui va nous occuper, est consacrée à la résolution des équations numériques de cette forme

$$x^{m+n} \pm ex^m \pm f = 0.$$

m, n, e, f sont des nombres *positifs* donnés; m et n peuvent être quelconques : mais, sans nuire à la généralité, on admet que m et n sont des entiers, premiers entre eux. Cette forme renferme quatre cas; mais, comme on peut se borner à la recherche des racines *positives*, on peut supprimer le cas où tous les signes sont positifs.

Faisons de plus, pour abréger, $\frac{f^n}{e^{m+n}} = \lambda$.

Première forme :

$$x^{m+n} + ex^m - f = 0.$$

Introduisons un angle θ, à prendre dans le premier quadrant. A cet effet posons

$$\frac{x^{m+n}}{f} = \sin^2\theta, \quad \frac{ex^m}{f} = \cos^2\theta,$$

d'où

$$x^{m+n} = f\sin^2\theta, \quad x^m = \frac{f\cos^2\theta}{e}, \quad x^n = e\,\text{tang}^2\theta.$$

Éliminant x, on obtient

$$\lambda = \frac{\sin^{2m}\theta}{\cos^{2m+2n}\theta},$$

équation qui sert à déterminer la valeur de θ. En faisant croître θ depuis 0 jusqu'à 90 degrés, on voit que le second membre de la dernière équation croît depuis 0 jusqu'à ∞ ; il existe donc une valeur et une valeur seulement, qui satisfait à l'équation: après qu'on aura trouvé θ, une quelconque des équations (1) donnera les valeurs de x.

Lorsque $\theta = 45$ degrés, on a $\lambda = 2^n$; donc, lorsque λ est moindre que 2^n, il faut chercher θ dans le premier octant, et pour $\lambda > 2^n$, il faut chercher θ dans le second octant; on trouve la valeur de θ par la méthode indirecte connue.

Deuxième forme :

$$x^{m+n} - ex^m - f = 0.$$

Posons

$$fx^{-m-n} = \sin^2\theta, \quad ex^{-n} = \cos^2\theta;$$

d'où

$$(1) \qquad x^{m+n} = \frac{f}{\sin^2\theta}, \quad x^n = \frac{e}{\cos^2\theta}, \quad x^m = \frac{f\cot^2\theta}{e},$$

et, éliminant x,

$$\lambda = \frac{\sin^{2n}\theta}{\cos^{2m+2n}\theta}.$$

θ a une valeur réelle et n'en a qu'une seule.

Pour $\lambda < 2^m$, il faut chercher θ dans le premier octant, et pour $\lambda > 2^m$, dans le second octant.

Troisième forme :

$$x^{m+n} - ex^m + f = 0.$$

Posons

$$\frac{x^n}{e} = \sin^2\theta, \quad \frac{fx^{-m}}{e} = \cos^2\theta,$$

d'où

$$(1) \qquad x^{m+n} = f\,\mathrm{tang}^2\theta, \quad x^m = \frac{f}{e\cos^2\theta}, \quad x^n = e\sin^2\theta,$$

et de là

$$\lambda = \cos^{2n}\theta\sin^{2m}\theta.$$

Le second membre s'annule en faisant $\theta = 0$ et en faisant $\theta = 90^\circ$; il existe donc un maximum entre 0 et 90 degrés. Le logarithme de cette fonction est

$$2n\log\cos\theta + 2m\log\sin\theta;$$

la différentielle est

$$(2m\cot\theta - 2n\,\mathrm{tang}\,\theta)\,d\theta;$$

donc le maximum correspond à une valeur θ_1 telle, que l'on ait

$$\mathrm{tang}\,\theta_1 = \sqrt{\frac{m}{n}}.$$

Ainsi, pendant que θ croît de 0 à θ_1 (moindre que 90 degrés), la fonction croît et atteint pour $\theta = \theta_1$, la plus grande valeur $\frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}$, et décroît de θ_1 à 90 degrés où elle devient nulle ; lorsque $\theta = 45^\circ$, la fonction est égale à $\frac{1}{2^{m+n}}$: donc on a toujours $\frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}} > \frac{1}{2^{m+n}}$, à moins que l'on ait $m = n$; dans ce cas, la valeur maximum devient égale à $\frac{1}{2^{m+n}} = \frac{1}{2^{2m}}$.

On conclut de là, lorsque

$$\lambda > \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}},$$

qu'aucune valeur de θ ne peut satisfaire à l'équation

$$\lambda = \cos^{2n}\theta \sin^{2m}\theta,$$

et, par conséquent, l'équation

$$x^{m+n} - ex^m + f = 0$$

n'a aucune racine (positive); et si

$$\lambda < \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}},$$

cette équation a deux racines. Dans le cas spécial où

$$\lambda = \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}},$$

les deux racines de l'équation deviennent égales, et, pour les trouver, on peut employer à volonté l'une quelconque des trois équations

$$x^{m+n} = \frac{fm}{n}, \quad x^m = \frac{f}{e}\,\frac{m+n}{n}, \quad x^n = \frac{em}{m+n}.$$

Cas de deux racines. Si

$\lambda > \frac{1}{2^{m+n}}$ et $m < n$, les deux valeurs de θ sont dans le premier octant;

$\lambda > \frac{1}{2^{m+n}}$ et $m > n$, les deux valeurs de θ sont dans le deuxième octant;

$\lambda < \frac{1}{2^{m+n}}$, une valeur de θ est dans le premier octant et une dans le deuxième octant;

$\lambda = \frac{1}{2^{m+n}}$, une valeur de θ est 45 degrés, et l'autre est dans le même octant que θ_1.

On conclut facilement de l'analyse précédente des trois formes, que l'équation trinôme ne peut avoir plus de trois racines réelles, lorsque m et n n'ont pas de commun diviseur ; ce qu'on sait aussi d'après d'autres principes.

3. Pour résoudre l'équation qui donne la valeur de θ_1, on peut se servir des Tables de logarithmes trigonométriques ; mais M. Gauss emploie des Tables auxiliaires extrêmement commodes, qu'il a inventées en 1810, et qui, très-répandues aujourd'hui en Allemagne et en Angleterre, sont encore inconnues en France, même de nos calculateurs de profession. Nous en parlerons très-incessamment ; nous ne serions pas compris si nous rapportions aujourd'hui les calculs de M. Gauss, qu'il applique à la résolution de l'équation de la première forme

$$x^7 + 28x^4 - 480 = 0,$$

où

$$\lambda = \frac{6750}{823543}, \quad \log\frac{1}{\lambda} = 2,0863825.$$

On a

$$\lambda < 8; \quad \text{donc} \quad \theta < 45°.$$

On trouve

$$x = 1,9228841;$$

c'est la seule valeur positive.

Racines négatives.

Faisant $x = -y$, il vient

$$y^7 - 28y^4 + 480 = 0,$$

équation de la troisième forme ; on a

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{823543}{6750}, \quad \frac{7^7}{3^3.4^4} = \frac{823543}{6912} < \frac{1}{\lambda},$$

$$\frac{1}{\lambda} > 2^7 \quad \text{et} \quad m > n.$$

Ainsi l'on a le troisième cas, et il existe deux racines ; on trouve

$$y = 2,4580892, \quad y = 2,5778036.$$

Racines imaginaires.

4. Pour plus de généralité, on suppose que les coefficients sont des nombres *complexes*, et l'équation trinôme prend cette forme

$$(\mathrm{X}) \quad x^{m+n} + e(\cos\varepsilon + i\sin\varepsilon)x^m + f(\cos\varphi + i\sin\varphi) = 0.$$

On admet encore que m et n sont premiers entre eux; e et f sont des nombres positifs. Si le coefficient de x^m est réel, alors on a

$$\varepsilon = 0, \quad \text{ou} \quad \varepsilon = 180^\circ;$$

de même, si la quantité toute connue est réelle, on a

$$\varphi = 0, \quad \text{ou} \quad \varphi = 180^\circ:$$

nous donnons aux racines la forme connue

$$r(\cos\rho + i\sin\rho).$$

Ordinairement on suppose que r est positif; mais pour notre but, il est plus avantageux de ne pas admettre cette supposition, mais d'admettre que ρ est compris entre 0 et 180 degrés. Lorsque les coefficients de l'équation (X) sont réels, le nombre de valeurs de ρ se réduit à moitié, car une des valeurs étant comprise entre 0 et 90 degrés, il faut prendre une autre racine $180^\circ - \rho$, et remplacer r par $-r$; à chaque racine $t + iu$ correspond une autre racine $t - iu$.

5. Divisant l'équation (X) par x^{m+n}, on obtient

$$1 + e(\cos\varepsilon + i\sin\varepsilon)x^{-n} + f(\cos\varphi + i\sin\varphi)x^{-m-n} = 0;$$

remplaçant x par sa valeur $r(\cos\rho + i\sin\rho)$, on a

$$1 + er^{-n}[\cos(n\rho - \varepsilon) - i\sin(n\rho - \varepsilon)]$$
$$+ fr^{-m-n}\{\cos[(m+n)\rho - \varphi] - i\sin[(m+n)\rho - \varphi]\} = 0.$$

Égalant à zéro, la partie imaginaire, on déduit une valeur de r^m en fonction de ρ.

Si l'on divise l'équation (X) successivement par son deuxième et son troisième terme en opérant comme ci-dessus, en égalant à zéro la partie imaginaire et réunissant les résultats, on obtient

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} r^m &= -\frac{f\sin[(m+n)\rho-\varphi]}{e\sin(n\rho-\varphi)},\\ r^{m+n} &= -\frac{f\sin(m\rho+\varepsilon-\varphi)}{\sin(n\rho-\varepsilon)},\\ r^n &= \frac{e\sin(m\rho+\varepsilon-\varphi)}{\sin[(m+n)\rho-\varphi]}; \end{aligned}\right.$$

chacune de ces équations est d'ailleurs une conséquence des deux autres.

Éliminant r entre deux quelconques d'entre elles, on a

$$(2)\qquad \lambda = (-1)^{m+n}\frac{\sin^m(m\rho+\varepsilon-\varphi)\sin^n(n\rho-\varepsilon)}{\sin^{m+n}[(m+n)\rho-\varphi]}$$

ou

$$\lambda = \frac{f^n}{e^{m+n}};$$

ainsi λ est essentiellement positif.

Cette équation détermine les diverses valeurs de ρ; la valeur de r, qui correspond à chaque valeur de ρ, se trouve au moyen d'une des équations (1), de préférence de la deuxième équation, eu égard à la valeur absolue; toutefois, au cas où $m+n$ est pair, il faudra encore avoir recours à l'une des deux autres équations pour décider si r est positif ou négatif.

6. La solution de l'équation (2) s'obtient facilement par voie indirecte; à quoi peuvent contribuer les considérations suivantes :

1°. Les valeurs de ρ sont entre 0 et 180 degrés, et, au cas où les coefficients sont réels, il suffit de chercher la moitié des valeurs, celles qui sont comprises entre o et 90 degrés.

2°. Dans l'un et dans l'autre cas, il faut sous-diviser l'intervalle de o à 90 ou à 180 degrés, au moyen des changements de signe qu'on observe dans les valeurs du second membre de l'équation (2), lorsque ρ parcourt toutes ses valeurs de o à 180 degrés; changements qui s'opèrent évidemment lorsque l'un des angles $m\rho + \varepsilon - \varphi$, $n\rho - \varepsilon$, $(m+n)\rho - \varphi$ devient divisible par 180 degrés, et alors cette fonction devient nulle ou infinie. On n'a pas besoin d'avoir égard aux valeurs négatives, puisque λ est essentiellement positif.

7. Cherchons les racines imaginaires de l'équation de ci-dessus,

$$x^7 + 28x^4 - 480 = 0;$$

on a

$$m = 4, \quad n = 3, \quad e = 28, \quad f = 480$$

et

$$\varepsilon = 0, \quad \varphi = 180^\circ.$$

Les équations (1) deviennent

$$r^4 = \frac{480 \sin 7\rho}{28 \sin 3\rho},$$

$$r^7 = -\frac{480 \sin 4\rho}{\sin 3\rho},$$

$$r^3 = -\frac{28 \sin 4\rho}{\sin 7\rho};$$

l'équation (2) donne

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{823543}{6750} = \frac{\sin^7 7\rho}{\sin^3 3\rho \sin^4 4\rho}.$$

L'équation a trois racines réelles et, par conséquent, quatre racines imaginaires. Il faut donc chercher deux valeurs de ρ comprises entre o et 90 degrés.

On forme facilement le tableau suivant des diverses valeurs de la fonction en ρ, qui établissent des changements de signe,

$$\begin{array}{lll} \rho = & 0^\circ \ldots\ldots\ldots & + \dfrac{823543}{6912} = \dfrac{7^7}{3^3 . 4^4}, \\ & 25^\circ \frac{5}{7} \ldots\ldots\ldots & + \; 0, \\ & 45^\circ \ldots\ldots\ldots & - \; \infty, \\ & 51^\circ \frac{3}{7} \ldots\ldots\ldots & - \; 0, \\ & 60^\circ \ldots\ldots\ldots & + \; \infty, \\ & 77^\circ \frac{1}{7} \ldots\ldots\ldots & - \; 0, \\ & 90^\circ \ldots\ldots\ldots & + \; \infty; \end{array}$$

ainsi les deux valeurs de ρ sont comprises entre $51 \frac{3}{7}$ et 60, et entre $77 \frac{1}{7}$ et 98. L'auteur trouve pour première valeur,

$$\rho = 57^\circ 41' 41'',366,$$

et, d'après la seconde équation (r^7), on trouve

$$\begin{array}{rl} \log \sin 4\rho = & 9,8891425\, n \\ \text{compl. } \log \sin 3\rho = & 0,9193523 \\ \log(-480) = & 2,6812412\, n \\ \hline 7 \log r = & 3,4897360 \\ \log r = & 0,4985337, \end{array}$$

(La lettre n désigne que le nombre est négatif.)

et

$$x = +\, 1,6843159 + 2,6637914\, i,$$

et aussi

$$x = +\, 1,6843159 - 2,6637914\, i,$$

et la seconde valeur de $\rho = 86^\circ 19' 13'',342$

$$\begin{array}{rl} \log \sin 4\rho = & 9,4049540\, n \\ \text{compl. } \log \sin 3\rho = & 0,0081108\, n \\ \log(-480) = & 2,6812412\, n \\ \hline 7 \log r = & 2,0943060\, n \\ \log r = & 0,2991866\, n \end{array}$$

Si l'on veut que r soit positif, il suffit d'augmenter ρ de 180 degrés, et de prendre $\rho = 266^\circ 19' 13'',342$.

8. Ainsi les sept racines de l'équation

$$x^7 + 28x^4 - 480 = 0$$

sont

$$\begin{array}{l} +\ 1,9228841 \\ -\ 2,4580892 \\ -\ 2,5778036 \\ +\ 1,6843159 \pm 2,6637914\, i \\ -\ 0,1278113 \pm 1,9874234\, i \end{array}$$

La somme des racines est $+\ 0,0000005$; ce qui s'accorde avec la vraie valeur (zéro) autant qu'on peut l'espérer, en faisant usage des Tables avec sept décimales; cherchant le logarithme du produit de ces racines, on trouve

$$2,6812411,$$

qui s'approche suffisamment du logarithme de 480.