NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

F. HÉMENT

Théorème de M. Steiner, sur les axes rectangulaires, dans les surfaces du second degré

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 10 (1851), p. 119-122

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1851_1_10__119_1>

THÉORÈME DE M. STEINER, SUR LES AXES RECTANGULAIRES, DANS LES SURFACES DU SECOND DEGRÉ

(voir t. IX, p. 407).

PAR M. F. HÉMENT,
Professeur au lycée de Strasbourg.

1. Le théorème de M. Steiner sur les axes rectangulaires dans les coniques peut être démontré ainsi :

Prenant pour axes les deux droites rectangulaires, l'équation de la conique est

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0.$$

En faisant successivement $x = 0$, $y = 0$, on obtient

$$Ay^2 + Dy + F = 0,$$
$$Cx^2 + Ex + F = 0,$$

équations qui donnent les segments des droites a et b; on a donc

$$x'x'' = \frac{F}{C}, \qquad y'y'' = \frac{F}{A},$$

$$x'^2 x''^2 = \frac{F^2}{C^2}, \qquad y'^2 y''^2 = \frac{F^2}{A^2}.$$

Les racines étant de signes contraires, on a

$$a = x' - x'' = \frac{\sqrt{E^2 - 4\,CF}}{C},$$

$$b = y' - y'' = \frac{\sqrt{D^2 - 4\,AF}}{A},$$

$$a^2 = \frac{E^2 - 4\,CF}{C^2}, \qquad b^2 = \frac{D^2 - 4\,AF}{A^2},$$

et enfin

$$\frac{a^2}{x'^2 x''^2} + \frac{b^2}{y'^2 y''^2} = \frac{E^2 - 4\,CF + D^2 - 4\,AF}{F^2},$$

quantité constante; car, comme les deux axes rectangulaires sont quelconques, on peut généraliser en changeant leur direction. On a alors

$$D'^2 = (D \sin\alpha + E\cos\alpha)^2,$$
$$E'^2 = (D\cos\alpha - E\sin\alpha)^2,$$
$$D'^2 + E'^2 = D^2 + E^2,$$
$$A' = A\sin^2\alpha + B\sin\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha,$$
$$C' = A\cos^2\alpha - B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha,$$
$$A' + C' = A + C,$$

F est le même ; donc

$$\frac{D^2 + E^2 - 4F(A + C)}{F^2} = \frac{D'^2 + E'^2 - 4F(A' + C')}{F'^2}.$$

2. Quant au théorème général, en prenant pour axes les trois droites rectangulaires, on a pour équation de la surface

$$Az^2 + By^2 + Cx^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gz + Ayx + Kx + L = o.$$

En faisant successivement

$$(x = o, y = o), \quad (y = o, z = o), \quad (x = o, z = o),$$

on obtient

$$\begin{aligned} Az^2 + Bz + L &= o, \\ Cx^2 + Kx + L &= o, \\ By^2 + Hy + L &= o, \end{aligned}$$

équations qui donnent les segments des droites a, b, c; on a donc

$$\begin{aligned} a^2 &= \frac{G^2 - 4AL}{A^2}, & x'^2 x''^2 &= \frac{L^2}{A^2}, \\ b^2 &= \frac{K^2 - 4CL}{C^2}, & y'^2 y''^2 &= \frac{L^2}{C^2}, \\ c^2 &= \frac{H^2 - 4BL}{B^2}, & z'^2 z''^2 &= \frac{L^2}{B^2}, \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{a^2}{x'^2 x''^2} + \frac{b^2}{y'^2 y''^2} + \frac{c^2}{z'^2 z''^2}$$
$$= \frac{G^2 + K^2 + H^2 - 4AL - 4CL - 4BL}{L^2} = \text{const.}$$

Si l'on prend, en effet, d'autres axes rectangulaires, on obtient

$$\begin{aligned} A' + B' + C' &= A + B + C, \\ G'^2 + K'^2 + H'^2 &= G^2 + H^2 + K^2, \end{aligned}$$

en faisant attention aux relations connues qui existent entre les cosinus des angles que les nouveaux axes font avec les anciens : d'ailleurs L ne change pas ; donc

$$\frac{D'^2 + E'^2 + F'^2 - 4L(A' + B' + C')}{L^2}$$
$$= \frac{D^2 + E^2 + F^2 - 4L(A + B + C)}{L^2}.$$

C. Q F. D.

Note. $\frac{1}{x'x''} + \frac{1}{y'y''} + \frac{1}{z'z''} = \text{const.}$