NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. COUPY

Solution d'un problème appartenant à la géométrie de situation, par Euler

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 10 (1851), p. 106-119

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1851_1_10__106_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1851, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

SOLUTION D'UN PROBLEME APPARTENANT A LA GÉOMÉTRIE DE SITUATION, PAR EULER;

TRADUIT DU LATIN, PAR M. E. COUPY,
Professeur au collège militaire de la Flèche.

Le problème dont je hasarde ici la traduction est inséré dans les Commentaires de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg, tome VIII, page 128, année 1736. *M. Poinsot* (*), *dans son célèbre Mémoire de* 1810 *sur les Polygones et les Polyèdres étoilés, et Lhuillier, de Genève, dans son Algèbre, l'ont mentionné tous deux. Ce problème intéressant, d'une solution fort ingénieuse, n'a été traduit, que je sache, dans aucun recueil français, et se trouve enfoui maintenant dans une volumineuse collection à la portée seulement des personnes qui habitent la capitale. J'ai pensé qu'on lirait, au moins avec curiosité, ce problème; c'est ce qui m'a décidé à publier cette traduction que j'ai faite, il y a quelques années, à Paris.*

(*) *Voir* tome VIII, page 13[illegible].

1. Outre cette partie de la géométrie qui traite des grandeurs et qui a été de tout temps cultivée avec beaucoup de zèle, il en est une autre, jusqu'à nos jours complétement inconnue, dont Leibnitz a fait le premier mention et qu'il appela *géométrie de position.* D'après lui, cette partie de la géométrie s'occupe de déterminer seulement la position et de chercher les propriétés qui résultent de cette position; dans ce travail, il n'est besoin, ni d'avoir égard aux grandeurs elles-mêmes, ni de les calculer; mais il n'est pas encore assez bien établi quels sont les problèmes de ce genre appartenant à la géométrie de position, et quelle méthode il faut employer pour les résoudre; c'est pourquoi lorsque récemment il fut question d'un problème qui semblait, à la vérité, se rattacher à la géométrie ordinaire, mais dont cependant la solution ne dépendait, ni de la détermination de grandeurs, ni du calcul de quantités, je n'ai point balancé à le rapporter à la géométrie de position, d'autant plus que les considérations de position entrent seules dans la solution, tandis que le calcul n'y est pour rien. J'ai donc cru utile d'exposer ici, comme un exemple de géométrie de position, la méthode que j'ai trouvée pour résoudre les problèmes de ce genre.

2. Or ce problème, qu'on me disait être assez connu, était le suivant :

A Kœnigsberg, en Prusse, il y a une île A appelée le *Kneiphof*, entourée d'un fleuve qui se partage en 2 bras, comme on peut le voir sur la figure 1, mais les bras de ce fleuve sont garnis de 7 ponts a, b, c, d, e, f, g, et l'on proposait cette question sur ces ponts : Une personne peut-elle s'arranger de manière à passer une fois sur chaque pont, mais une fois seulement? Les uns affirmaient que cela était possible; d'autres niaient; d'autres en doutaient; mais personne ne pouvait prouver. Quant à moi, j'ai fait de ce problème le suivant beaucoup plus général :

Quelle que soit la figure du fleuve et sa distribution en bras, et quel que soit aussi le nombre des ponts, trouver si une personne peut traverser le fleuve en passant une seule fois sur chaque pont.

3. Pour ce qui regarde les 7 ponts de Kœnigsberg, on pourrait resoudre le problème en faisant l'énumération complète de toutes les manières de passer qui peuvent avoir lieu, car on verrait par là quelle est celle qui satisfait, ou bien on reconnaîtrait qu'il n'y en a aucune. Mais ce mode de solution, à cause du si grand nombre de combinaisons, serait trop difficile et trop laborieux, et ne pourrait même plus s'appliquer dans les autres questions où il y aurait beaucoup plus de ponts. Au reste, si par ce moyen l'opération était conduite jusqu'au bout, on trouverait beaucoup de manières de passer qui ne satisfont pas à la question, et c'est en cela sans doute que consiste la cause d'une si grande difficulté. Ayant donc laissé de côté cette méthode, j'en ai cherché une autre qui me donne non pas toutes les manières de passer, mais me montre seulement celle qui satisfait à la question; et je regarde une pareille méthode comme de beaucoup plus simple que la précédente.

4. Toute ma méthode se fonde sur une manière particulière de représenter chaque passage de pont, dans laquelle j'emploie les lettres majuscules A, B, C, D, qui sont écrites à chaque région que sépare le fleuve. Ainsi, si quelqu'un va de la région A à la région B, en passant sur le pont *a* ou sur le pont *b*, je désigne ce passage par les lettres AB. La première marque la région d'où sort le voyageur; la seconde, la région dans laquelle il est parvenu après avoir passé le pont. Si ensuite le voyageur s'en va dans la région D par le pont *f*, ce passage sera représenté

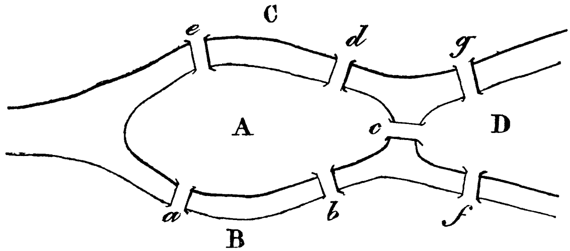
par les lettres BD, et je représente ces 2 passages successifs AB et BD seulement par 3 lettres ABD, celle du milieu B représentant, tant la région où il est parvenu par un premier passage que celle d'où il est sorti pour un second passage.

5. Par un moyen semblable, si le voyageur s'avance de la région D dans la région C par le pont g, je représenterai ces 3 passages faits successivement par 4 lettres ABDC, car on comprendra par ces 4 lettres ABDC, que le voyageur étant d'abord dans la région A, a passé dans la région B, de là s'est avancé dans la région D, et enfin, de là a passé dans la région C; et puisque ces régions sont séparées mutuellement par l'eau les unes des autres, il est nécessaire que le voyageur ait passé sur 3 ponts. De même, les passages faits successivement sur 4 ponts seront représentés par 5 lettres, et si le voyageur continue sa marche autant qu'il y a de ponts, son voyage sera représenté par un nombre de lettres supérieur d'une unité au nombre de ponts. C'est pourquoi il faut 8 lettres pour représenter les passages sur 7 ponts.

6. Dans ce mode de notation, je ne considère point par quels ponts le passage se fait; mais si le même passage d'une région à une autre peut se faire par plusieurs ponts, peu importe par quel pont on passe d'abord pour arriver dans la région désignée. On comprend, d'après cela, que si le voyageur peut continuer sa course sur les 7 ponts de la figure 1, de manière à passer une fois sur chacun d'eux, et jamais deux fois sur aucun, cette course pourra se représenter par 8 lettres, et ces lettres devront être disposées de telle sorte que la succession immédiate des lettres A et B se présente deux fois puisqu'il y a 2 ponts a et b qui joignent ces régions A, B : de même, la succession des lettres A et C devra aussi se trouver deux fois dans cette série de 8 lettres et pour la même raison, en-

suite la succession des lettres A et D devra s'y trouver une seule fois, et, enfin, il faudra semblablement que la succession des lettres B et D, et celle des lettres C et D s'y trouvent chacune une fois.

Fig. 1.



7. La question est donc ramenée à former avec 4 lettres A, B, C, D, une série de 8 lettres dans laquelle toutes ces successions se présentent autant de fois qu'il vient d'être trouvé. Mais avant de chercher une telle disposition, il convient de faire voir si ces lettres peuvent ou non être disposées d'une telle manière. Car si l'on pouvait démontrer qu'une telle disposition des 4 lettres A, B, C, D est tout à fait impossible, tout travail qui aurait pour but de la chercher, serait évidemment inutile. C'est pourquoi j'ai inventé une règle par le secours de laquelle, tant pour cette question que pour toutes celles du même genre, il est facile de discerner si un tel arrangement des lettres peut ou non avoir lieu.

8. Pour trouver cette règle, je considère une région unique A (*fig.* 2) à laquelle conduisent autant de ponts qu'on veut, a, b, c, d, ...; je prends d'abord un seul de ces ponts qui conduisent à la région A, par exemple a. Si maintenant le voyageur passe sur ce pont, ou bien il devra être avant le passage dans la région A, ou bien il parviendra après le passage dans cette région A; c'est pour-

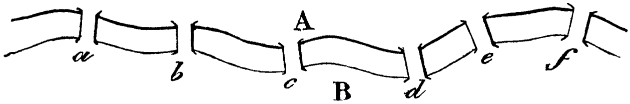
quoi, dans la manière établie ci-dessus de représenter les passages, il faut que la lettre A se trouve une fois. Si vous supposez 3 ponts *a*, *b*, *c* conduisant dans la région A, et que le voyageur ait traversé ces 3 ponts, alors dans la représentation de ce voyage la lettre A se trouvera deux fois, soit que ce voyage ait commencé en partant de A, soit qu'il ait commencé en y allant. De même, si 5 ponts conduisent en A, dans la représentation du passage sur tous ces ponts, la lettre A devra se trouver trois fois; et, en général, si le nombre des ponts est un nombre impair quelconque, en augmentant ce nombre de 1, et prenant la moitié, on aura le nombre de fois que la lettre A doit se trouver dans la représentation du passage.

9. Dans ce cas donc des ponts de Kœnigsberg (*fig.* 1), puisque 5 ponts *a*, *b*, *c*, *d*, *e* conduisent dans l'île A, il est nécessaire que dans la représentation du passage sur ces ponts la lettre A se trouve trois fois. Ensuite la lettre B, puisque 3 ponts conduisent dans la région B, devra se trouver deux fois; de même la lettre D ainsi que la lettre C, devra se trouver deux fois et pour la même raison. Donc, dans la série des 8 lettres représentant le passage sur les 7 ponts, la lettre A devrait se trouver trois fois, et les lettres B, C, D, chacune deux fois, ce qui, dans une série de 8 lettres, est complétement impossible. Il suit clairement de là que sur les 7 ponts de Kœnigsberg, le passage demandé est impossible.

10. Par un procédé semblable, on peut dans tout autre cas, pourvu toutefois que le nombre de ponts qui conduisent dans chaque région soit impair, on peut reconnaître si le passage une seule fois sur chaque pont est possible. Car s'il arrive que la somme de toutes les fois que chaque lettre doit se trouver, soit égale au nombre de tous les ponts augmenté de 1, alors le passage demandé sera possible. Mais si, au contraire, il arrive, comme dans notre

exemple, que cette somme soit plus grande que le nombre total des ponts augmenté de 1, alors le passage demandé ne pourra s'effectuer d'aucune manière. Mais la règle que j'ai donnée pour déduire du nombre de ponts conduisant dans la région A le nombre de fois que la lettre A doit s'écrire, s'applique également, soit que tous les ponts conduisent d'une seule région B comme le représente la figure 2, en A, soit qu'ils conduisent de plusieurs, car je considère seulement la région A et je recherche combien de fois la lettre A doit se trouver.

Fig. 2.



11. Mais si le nombre des ponts qui conduisent dans la région A est pair, alors il faudra distinguer, pour le passage sur chaque pont, si le voyageur a commencé ou non sa course en partant de la région A. En effet, si 2 ponts conduisent en A et que le voyageur ait commencé sa course en partant de A, alors la lettre A devra se trouver deux fois; une fois elle représentera la sortie de A par l'un des ponts et encore une fois, pour représenter le retour en A par l'autre point. Mais si, au contraire, le voyageur avait commencé sa course en partant de l'autre région, alors la lettre A ne se présentera plus qu'une fois; car écrite une fois, elle représentera, d'après ma manière de représenter ces courses, tant l'arrivée en A que la sortie de cette même région.

12. Que 4 ponts conduisent dans la région A et que le voyageur commence sa course en partant de A; alors, dans la représentation de sa marche complète, la lettre A devra se trouver trois fois, pourvu toutefois qu'il n'ait passé qu'une seule fois sur chaque pont. Mais s'il a commencé à marcher en partant de l'autre région, la lettre A se trouvera seulement deux fois. S'il y a 6 ponts qui conduisent dans la région A, alors la lettre A se trouvera quatre fois, si le voyageur a commencé par partir de A, sinon elle ne se trouvera que trois fois, et généralement si le nombre des ponts est pair, la moitié donne le nombre de fois que la lettre A doit se trouver si l'on n'a pas commencé à partir de A; et cette moitié, augmentée de 1, sera le nombre de fois que A devra s'écrire, en commençant la course de la région A elle-même.

13. Voici de quelle manière je déduis du nombre de ponts qui conduisent à une région, le nombre de fois que cette région, présentée par une lettre, devra s'écrire dans la course désirée. Je prends la moitié du nombre des ponts augmenté de 1, si ce nombre de ponts est impair, et la moitié de ce même nombre s'il est pair. Ensuite, si le nombre de fois que toutes les lettres doivent s'écrire est égal au nombre des ponts augmenté de 1, alors le passage désiré a lieu, mais on doit commencer à marcher d'une région à laquelle conduisent un nombre impair de ponts; mais si ce nombre de fois est inférieur de 1 au nombre des ponts augmenté de 1, alors le passage a lieu en commençant par une région à laquelle conduise un nombre pair de ponts, parce que par ce moyen le nombre des fois qu'on doit écrire les lettres est augmenté de 1.

14. Étant donc proposée une rivière quelconque, garnie de ponts comme on voudra, pour trouver si une personne peut passer sur chaque pont une fois seulement, j'établis l'opération de la manière suivante : 1° je représente chacune des régions séparées mutuellement les unes des autres par l'eau, respectivement par A, B, C, D,...; 2° je prends le nombre total des ponts que j'augmente de 1, et je note ce nombre pour l'opération

suivante; 3° à côté de chacune des lettres A, B, C,..., écrites l'une au-dessous de l'autre, j'écris le nombre de ponts conduisant à la région marquée par la lettre que je considère; 4° je marque d'un astérisque les lettres qui ont un nombre pair écrit à côté d'elles; 5° j'écris les moitiés de tous ces nombres pairs et les moitiés des nombres impairs, augmentés de 1, dans une même colonne, chacune de ces moitiés dans la même ligne horizontale que la lettre d'où elle dépend; 6° je fais la somme des nombres écrits en dernier lieu. Si cette somme est inférieure de 1, ou égale au nombre trouvé dans le 2°, qui est le nombre total des ponts augmenté de 1, j'en conclurai que le passage cherché est possible. Mais pour que cela soit possible, quand la somme trouvée est inférieure de 1 au nombre écrit en haut de sa feuille, on doit partir d'une région marquée d'un astérisque; mais, au contraire, on devra partir d'une région non astérisquée, quand la somme sera égale au nombre précité. Ainsi, par exemple, pour le cas des ponts de Kœnigsberg, j'établis l'opération comme il suit :

Nombre des ponts 7 : j'ai donc 8.

	Ponts	
A	5	3
B	3	2
C	3	2
D	3	2
		9

Et comme la somme 9 de la seconde colonne est > 8, le passage demandé est impossible.

15. Soient 2 îles A et B entourées d'eau, avec lesquelles communiquent 4 fleuves, comme le représente la figure 3; 15 ponts sont jetés sur ces fleuves, et l'on demande si une personne peut s'arranger de manière à passer une

fois et une seule fois sur chacun de ces ponts. Je désigne d'abord 1° toutes les régions séparées mutuellement par l'eau, par les lettres A, B, C, D, E, F : j'ai donc de la sorte 6 régions ; ensuite 2° j'augmente de 1 le nombre total des ponts, et j'écris le nombre 16.

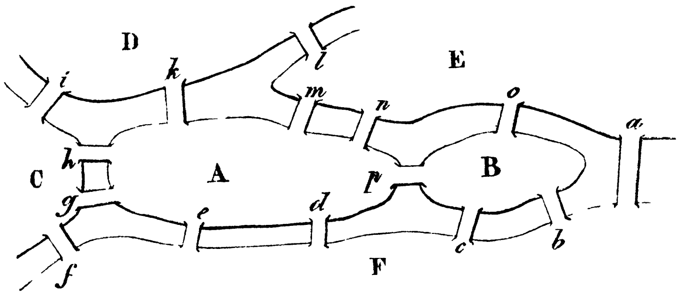
A*	8	4
B*	4	2
C*	4	2
D	3	2
E	5	3
F*	6	3
		16

3° j'écris les lettres A, B, C,..., les unes au-dessous des autres, et à côté de chaque lettre le nombre de ponts conduisant à la région que marque la lettre. Ainsi 8 ponts conduisant à A, 4 à B, etc. ; 4° je marque d'un astérisque les lettres à côté desquelles se trouve un nombre pair ; 5° j'écris dans une troisième colonne verticale les moitiés des nombres pairs, j'augmente de 1 les nombres impairs, et j'écris de même les moitiés de ces nombres impairs ainsi augmentés de 1 ; 6° j'additionne les nombres de cette troisième colonne, et j'ai une somme 16 égale au nombre 16 écrit en haut : il en résulte que le passage peut être fait de la manière voulue, en partant soit de la région D, soit de la région E, car ces lettres ne sont pas marquées d'une étoile ; la course pourra se faire de la manière suivante :

E *a* F *b* B *c* F *d* A *e* F *f* C *g* A *h* C *i* D *k* A *m* E *n* A *p* B *o* E *l* D,

notation dans laquelle j'ai placé entre les lettres majuscules les ponts sur lesquels le passage a lieu.

Fig. 3



16. Il sera donc très-facile par ce procédé de reconnaître dans chaque cas proposé, si le passage unique sur tous les ponts peut ou non s'effectuer. Cependant je donnerai encore un moyen beaucoup plus facile de reconnaître cela, lequel se déduira sans difficulté de ce qui précède, après que j'aurai exposé quelques observations que voici. Je remarque d'abord que la somme des nombres de ponts écrits à côté de chaque lettre A, B, C, D,..., est double du nombre total des ponts; la raison en est que dans le calcul qui donne tous les ponts conduisant à une région donnée, un pont quelconque est compté deux fois, c'est-à-dire que chaque pont est rapporté à l'une et l'autre des deux régions qu'il joint.

17. Il suit de cette observation que le nombre total des ponts qui conduisent dans chaque région est toujours un nombre pair, puisque la moitié de cette somme est égale au nombre des ponts. Il ne peut donc pas se faire que parmi les nombres de ponts conduisant à une région quelconque, il n'y en ait qu'un seul d'impair, ou trois, ou cinq, etc. C'est pourquoi, si des nombres de ponts adjoints aux lettres A, B, C,..., sont impairs, il est nécessaire que le nombre de ces nombres impairs soit pair. Ainsi, dans l'exemple de Kœnigsberg, les nombres impairs adjoints

aux lettres des régions A, B, C, D,..., étaient au nombre de quatre (*voyez* n° 14), et dans l'exemple précédent du n° 15, il y a seulement deux nombres impairs, adjoints aux lettres D et E.

18. Puisque la somme de tous les nombres adjoints aux lettres A, B, C,..., égale le double du nombre des ponts, il est manifeste qu'en augmentant cette somme de 2 et en en prenant la moitié, on aura le nombre établi au commencement de l'opération. Si donc tous les nombres adjoints aux lettres A, B, C,..., sont pairs, et qu'on prenne la moitié de chacun d'eux pour former les nombres de la troisième colonne, la somme de ces nombres sera inférieure de 1 au nombre que nous savons. C'est pourquoi, dans ces cas, le passage sur tous les ponts pourra toujours s'effectuer; car, en quelque région que la course commence, on sera conduit en cette région par un nombre pair de ponts, ainsi qu'il est requis. Par exemple, dans le problème de Kœnigsberg, on peut s'arranger de manière à passer deux fois sur tous les ponts, car ce serait comme si chaque pont eût été divisé en deux, et alors le nombre des ponts conduisant dans une région quelconque sera pair.

19. Maintenant, si l'on suppose qu'il y a seulement deux nombres impairs adjoints aux lettres A, B, C,... (on sait qu'il ne peut pas y en avoir un seul), et que tout le reste soit pair, alors la course demandée est possible, pourvu que l'on parte d'une des régions à laquelle conduit un nombre impair de ponts. Car, si, selon la règle, on prend la moitié des nombres pairs, et la moitié des nombres impairs augmentés de 1, la somme de toutes ces moitiés sera supérieure de 1 au nombre de ponts, et par conséquent égale au nombre précité lui-même, et l'on voit par là que s'il y a ou quatre, ou six, ou huit,..., nombres impairs dans la deuxième colonne, alors la somme des

nombres de la troisième sera plus grande que le nombre précité, et le surpassera ou de 1, ou de 2, ou de 3,..., unités, et que, par conséquent, le passage demandé sera impossible.

20. Quel que soit donc le cas proposé, on pourra très-facilement reconnaître sur-le-champ, au moyen de la règle suivante, si le passage une seule fois sur tous les ponts est ou non possible.

S'il y a plus de deux régions auxquelles conduisent un nombre impair de ponts, vous pouvez affirmer avec certitude qu'un tel passage est impossible. Mais si l'on est seulement conduit à deux régions par un nombre impair de ponts, le passage est possible, mais en commençant sa course par l'une ou l'autre de ces deux régions. Enfin, s'il n'y a aucune région à laquelle on soit conduit par un nombre impair de ponts, alors le passage pourra avoir lieu, comme on le désire, et en commençant sa marche par telle région qu'on voudra. Cette règle satisfait donc pleinement au problème proposé.

21. Mais, quand on aura reconnu que la question est possible, il restera encore à trouver comment la marche doit être dirigée. Je me sers pour cela de la règle suivante : qu'on néglige par la pensée, autant de fois qu'on peut le faire, 2 ponts conduisant d'une région à une autre; par cette abstraction, le nombre des ponts se trouvera généralement de beaucoup réduit; qu'on cherche alors, ce qui sera facile, la course demandée pour les ponts qui restent, et cela trouvé, les ponts enlevés par la pensée ne troubleront pas beaucoup le résultat obtenu, comme il est aisé de le voir avec un peu de réflexion; et je crois inutile d'insister davantage pour trouver la marche qu'on devra suivre pour répondre à la question proposée.

Note du traducteur. Une application intéressante du problème d'Euler peut être faite à Paris, sur les ponts nombreux qui garnissent la Seine, depuis le pont d'Iéna jusqu'au pont d'Austerlitz, et joignent les îles de la Cité et Saint-Louis En jetant les regards sur un plan de Paris, en appelant D la rive droite, G la rive gauche, A et B les îles de la Cité et Saint-Louis, on reconnaît que 11 ponts conduisent en A, 8 en B, 14 en G, 15 en D; donc le problème est possible, d'après la règle du n° 20, pourvu qu'on parte de la Cité ou de la rive droite, et il est très-facile de trouver effectivement la marche à suivre. Il est clair que dans ce problème, le pont *Neuf* et celui de la *Réforme* doivent compter chacun pour deux; car l'un mène de D en A et de A en G, et l'autre mène de D en B et de B en A.

Un autre problème célèbre de situation est celui du *cavalier aux échecs*, donné aussi par Euler, pour la première fois (*Mémoires de Berlin*, 1759) et dont Vandermonde donna depuis une solution plus simple, dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences*, pour 1771, page 566. M. Volpicelli s'est occupé récemment de ce problème. (*Comptes rendus*, 1850, tome XXXI, page 314.)