C.-E. PAGE

Programme d'un cours de mécanique élémentaire, deuxième article

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 9 (1850), p. 89-97

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1850_1_9__89_1>

PROGRAMME D'UN COURS DE MÉCANIQUE ÉLÉMENTAIRE

DEUXIÈME ARTICLE (voir page 14 de ce volume);

PAR M. C.-E. PAGE.

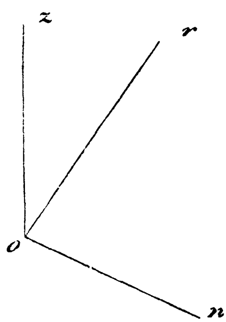
Mouvement de rotation autour d'un point fixe.

14. Lorsqu'un corps ou un système de points liés entre eux d'une manière invariable est assujetti à tourner autour d'un point fixe, on peut se représenter tous ses mouvements, en supposant qu'il tourne autour d'un axe choisi arbitrairement, mais qui lui est invariablement

lié tandis que cet axe lui-même tourne autour du point fixe.

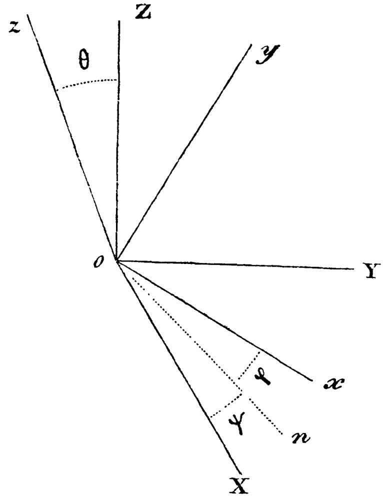
Or on obtient tous les mouvements possibles d'un axe tel que *or* (*fig.* 1) autour d'un point fixe *o*, en supposant qu'il tourne autour du point *o* dans le plan *roz*, tandis que ce plan lui-même tourne autour d'un axe fixe *oz*. Cela revient à faire tourner l'axe *or* autour d'un axe *on*, auquel il reste perpendiculaire, tandis que cet axe tourne autour d'un axe fixe *oz*, auquel il reste per-perpendiculaire.

fig. 1.



Pour nous convaincre que tous les mouvements de rotation autour du point *o* peuvent être obtenus de cette manière, considérons un système de trois axes rectangulaires qui coïncidait primitivement avec celui des trois axes fixes oX, oY, oZ (*fig.* 2), et qui est venu dans une position quelconque, ox, oy, oz. Pour faire passer les axes d'une de ces positions à l'autre, nous pouvons commencer par faire tourner le système autour de l'axe oZ, de manière que l'axe ox, qui coïncide d'abord avec l'axe fixe oX, vienne occuper la position on, après avoir décrit, dans le plan YoX, l'angle $noX = \psi$; puis, nous ferons tourner le système autour de la droite on, de manière que l'axe mobile oz décrive l'angle $zoZ = \theta$; enfin, nous ferons tourner le système autour de l'axe oz, de manière que l'axe ox décrive l'angle $nox = \varphi$. Il est évident qu'au lieu d'être successifs, ces trois mouvements peuvent être simultanés. Cela revient à faire tourner le système autour de l'axe mobile oz, tandis que cet axe tourne autour de l'axe on, en lui restant perpendiculaire, et que l'axe on tourne lui-même autour de l'axe fixe oZ en lui restant perpendiculaire.

fig. 2.



Lorsque l'on connaît la position des trois axes et leurs longueurs, c'est-à-dire les vitesses angulaires correspondantes, on peut en déduire la position de l'axe instantané de rotation, qui est représenté, comme nous l'avons vu, en grandeur et en direction, par la diagonale du parallélipipède construit sur ces axes. Lorsque l'on connaît la loi suivant laquelle varie la vitesse angulaire relative à chacun d'eux, on peut en déduire la série des positions par lesquelles ils passent; par suite, la série des positions que l'axe instantané occupe successivement dans l'espace et dans le système mobile. Il en résulte deux surfaces coniques, l'une fixe dans l'espace, l'autre dans le système mobile; et l'on a une représentation exacte du mouvement, en faisant rouler la surface mobile sur la surface fixe.

Mouvement d'un système entièrement libre.

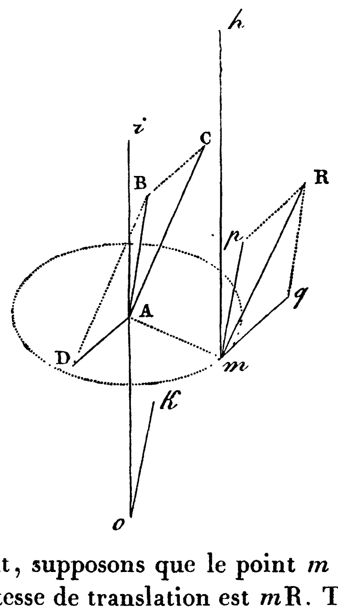
15. Lorsqu'un système de points liés entre eux d'une manière invariable se meut d'une manière quelconque dans l'espace, on décompose son mouvement en un mouvement de rotation autour d'un point pris arbitrairement pour centre, mais qu'on suppose invariablement lié au système, et un mouvement de translation de ce point. Cela revient à regarder à chaque instant la vitesse d'un point quelconque comme la résultante de deux autres vitesses, l'une égale et parallèle à la vitesse de translation du centre, l'autre due à la vitesse de rotation, par conséquent dirigée perpendiculairement au plan conduit par le point et par l'axe instantané, et égale à la vitesse angulaire multipliée par la distance de ce point à l'axe.

On peut se faire une image du mouvement, en supposant qu'une surface conique, dont le sommet est situé au point pris pour centre, et dont la forme dépend de la loi du mouvement de rotation, se meut parallèlement à elle-même d'un mouvement de translation, tandis qu'une seconde surface conique, qui a son sommet au même point, et à laquelle le système mobile est invariablement lié, roule sans glisser sur la première.

L'arête de contact de ces deux surfaces est l'axe instantané, dont tous les points ont une vitesse égale et parallèle à la vitesse du centre.

Le principe fondamental de cette décomposition consiste en ce que le mouvement de rotation reste toujours le même, quel que soit le point choisi pour centre. En effet, soient o (*fig.* 3) le centre, ok sa vitesse de translation, *oi* l'axe instantané et ω la vitesse angulaire. Pour tous les points situés sur la direction de l'axe, la composante due au mouvement de rotation est nulle; par conséquent sa vitesse est égale et parallèle à *ok*. Pour un point quelconque *m*, pris hors de l'axe, la vitesse *m*R est la résultante de deux composantes, l'une, *mp*, égale et parallèle à *ok*, l'autre, *mq*, perpendiculaire au plan *iom* et égale à A*m*.ω. Tous les points d'une droite *mh*, menée par le point *m* parallèlement à l'axe *oi*, ont des vitesses égales et parallèles; car, pour tous ces points, les deux composantes sont égales et parallèles. Tout point situé hors de cette parallèle a une vitesse différente; car l'une des composantes reste toujours égale et parallèle à *ok*, tandis que l'autre est nécessairement différente de *mq*.

fig. 3



Maintenant, supposons que le point *m* soit pris pour centre; sa vitesse de translation est *m*R. Tous les points de la droite *oi* ont une même vitesse égale et parallèle à *ok*;

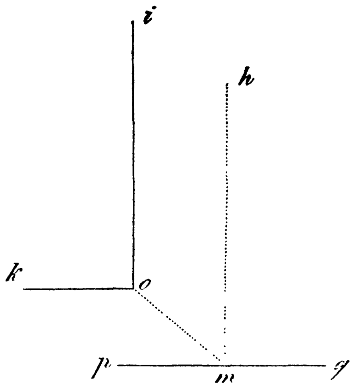
donc l'axe instantané est dirigé suivant une droite mh, parallèle à oi. Pour un point A de la droite oi, la vitesse AB, égale et parallèle à ok, est la résultante de deux composantes, l'une, AC, égale et parallèle à mR, l'autre, AD, perpendiculaire au plan iom. Or il est facile de voir que le second côté du parallélogramme, dont le premier côté est AC $= m$R, et la diagonale AB $= mp$, sera une droite AD égale et parallèle à mq, mais dirigée en sens contraire; d'où l'on conclut que la vitesse angulaire autour de mh est égale à la vitesse angulaire autour de oi, et dirigée dans le même sens.

Axe spontané.

16. S'il arrive qu'à un certain instant la vitesse de translation du centre soit dirigée perpendiculairement à l'axe instantané, les vitesses de tous les points sont perpendiculaires à cet axe; car, pour chaque point, les deux composantes lui sont perpendiculaires : de plus, il existe une droite qu'on suppose liée au système, et dont tous les points ont une vitesse nulle.

Soient o le centre (*fig.* 4), ok sa vitesse de translation, oi l'axe instantané perpendiculaire à ok; par le point o menons une droite om perpendiculaire au plan koi, et prenons la longueur om telle, que l'on ait $om.\omega = ok$: la vitesse du point m sera la résultante de deux vitesses, l'une, mp, égale et parallèle à ok, l'autre, mq, perpendiculaire au plan iom, par conséquent parallèle à ok, et égale à $om.\omega = ok$. Or nous pouvons toujours porter la longueur om en avant ou en arrière du plan iom, de manière que la composante mq soit dirigée en sens contraire de ok; les deux composantes mp et mq étant égales et de signes contraires, la vitesse du point m est nulle : donc tous les points de la droite mh, menée par le point m parallèlement à l'axe oi, ont une vitesse nulle, et les vitesses de tous les autres points sont les mêmes que si le système tournait autour de la droite *mh* immobile pendant cet instant. Cette droite prend alors le nom d'*axe spontané de rotation*.

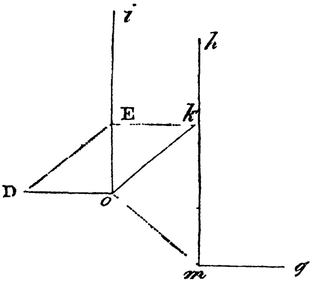
fig. 4.



Tant que la vitesse de translation du centre n'est pas perpendiculaire à l'axe instantané, il ne peut exister aucun point lié au système dont la vitesse soit nulle. En effet, la composante, due à la vitesse angulaire, est toujours perpendiculaire à l'axe. Si la composante, due à la vitesse de translation, n'est pas perpendiculaire à ce même axe, elle ne peut jamais être directement opposée à la première; mais, dans ce cas, on peut toujours chercher la droite liée au système, et dont tous les points ont la plus petite vitesse.

Soient *o* le centre, *ok* sa vitesse de translation, *oi* l'axe instantané: la vitesse d'un point quelconque est la résultante de la vitesse *ok* et d'une autre composante menée par le point *o* perpendiculairement à *oi*. Cette résultante sera donc toujours une droite menée du point *o* à l'un des points du plan passant par le point *k* perpendiculairement à *oi*; or la ligne la plus courte qu'on puisse mener du point o à ce plan est dirigée suivant oi, qui lui est perpendiculaire. Ce qui fait voir que la vitesse minima est dirigée parallèlement à l'axe instantané. Cherchons la droite dont tous les points ont une vitesse parallèle à oi; pour cela (*fig.* 5), achevons le parallélogramme dont ok est le premier côté et oE la diagonale, nous aurons la composante oD, due à la vitesse angulaire. Menons om perpendiculaire au plan Doi, prenons la longueur om telle, que l'on ait $om.\omega = o\mathrm{D}$, et portons cette longueur de manière que la composante mq soit dirigée en sens contraire de oD; tous les points de la droite mh, menée par le point m parallèlement à oi, auront une vitesse égale et parallèle à oE. Cette droite a été désignée, par M. Poinsot, sous le nom d'*axe spontané glissant,* parce que les vitesses de tous les points sont les mêmes que si le système glissait le long de cette droite en tournant autour d'elle.

fig. 5



Il faut remarquer que cet axe change à chaque instant de position dans l'espace et dans le système mobile.

Centre des moyennes distances.

17. Lorsqu'un système est animé à la fois d'un mouvement de translation et d'un mouvement de rotation, ses différents points ont, au même instant, des vitesses différentes en grandeur et en direction. Si l'on projette toutes ces vitesses sur une même droite, la moyenne de ces pro-

jections donne la vitesse de translation dans la direction de cette droite, et la direction suivant laquelle cette moyenne est la plus grande, donne justement la direction de la vitesse de translation générale du système.

Nous allons faire voir que, dans tout système de points liés entre eux d'une manière invariable, il existe un point unique dont la vitesse est toujours la moyenne des vitesses de tous les autres points, et dont le mouvement, par conséquent, représente le mouvement de translation de tout le système.

Pour cela, nous commencerons par démontrer que, dans tout système, il existe un point unique dont la distance à un plan quelconque est la moyenne des distances de tous les autres points du système au même plan. Pour cette raison, ce point est appelé *centre des moyennes distances*. (Nous le retrouverons plus loin sous les noms de *centre d'inertie* et *centre de gravité*.)

Nous démontrerons ensuite que, lorsque le centre des moyennes distances est pris pour centre de rotation, la somme des projections sur une droite quelconque de toutes les vitesses dues au mouvement de rotation est toujours nulle. Lorsque le mouvement du système est décomposé en un mouvement de rotation autour du centre des moyennes distances et un mouvement de translation de ce point, la vitesse de chaque point est la résultante d'une vitesse égale et parallèle à la vitesse de translation et d'une vitesse due à la rotation. Or la projection de la vitesse d'un point est égale à la somme des projections des deux composantes; la somme des projections de toutes les composantes dues à la rotation, étant nulle, il ne reste plus à considérer que les composantes dues au mouvement de translation. Toutes ces composantes étant égales et parallèles à la vitesse du centre, il est évident que cette vitesse est la moyenne des vitesses de tous les points.