Aire du polygone en fonction des coordonnées des sommets

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 9 (1850), p. 65

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1850_1_9__65_1>

AIRE DU POLYGONE EN FONCTION DES COORDONNÉES DES SOMMETS.

Polygone. Soient x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3;..., x_n, y_n les coordonnées des sommets consécutifs d'un polygone convexe de n côtés, et γ l'angle des axes; P étant l'aire cherchée, on a

$$2\mathrm{P} = \sin\gamma \begin{pmatrix} x_1 y_2 - y_1 x_2 + x_2 y_3 - y_2 x_3 + x_3 y_4 - y_3 x_4 + \ldots \\ + x_{n-1} y_n - y_{n-1} x_n \end{pmatrix}.$$

On parvient immédiatement à cette formule, en décomposant le polygone en trapèzes formés par les côtés, les ordonnées et les portions de l'axe des abscisses, comprises entre les ordonnées. Pour éviter l'embarras des signes, on choisit les axes de manière à ce que toutes les coordonnées soient positives.

Observation. Cette évaluation était connue de Waring, qui donne ainsi l'aire d'un polygone inscrit dans une parabole (*voir* t. IV, p. 183, au bas); cette formule ne paraît pas avoir été remarquée. De Stainville l'a donnée sous cette forme symétrique, à la notation près, dans un ouvrage devenu très-rare : *Recueil de Problèmes résolus par des considérations purement géométriques*, et il l'a reproduite dans ses *Mélanges d'Analyse*, p. 668; 1815.