Nouvelles annales de mathématiques

J. Murent

Solution de la question 215

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 9 (1850), p. 56-58

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1850_1_9__56_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 213

(voir t. VIII, p. 394),

PAR M. J. MURENT (DE CLERMONT-FERRAND).

Par tout point A d'une conique passent quatre cercles osculateurs, ayant leurs points de contact en A, B, C, D, le centre de la conique est le centre de moyenne distance des trois points B, C, D. (JOACHIMSTHAL.)

M. Terquem a déjà démontré (*voir* tome VII, page 22) qu'il y a, en effet, quatre cercles, et, en outre, que les quatre points d'osculation A, B, C, D sont sur une même circonférence. La démonstration est fondée sur une propriété que l'on trouve dans l'article de M. Gérono sur les normales (*voir* tome II, page 75).

Pour prouver la dernière partie de l'énoncé, prenons, à l'endroit cité du tome VII, l'équation de la conique rapportée à deux axes coordonnés menés par le point A, parallèlement aux axes principaux, savoir :

$$(1) \qquad Ay^2 + Cx^2 + Dy + Ex = 0,$$

et les équations simultanées

$$(2)\qquad \begin{cases} 2Ay'^2 - 2Cx'^2 + Dy' - Ex' = 0, \\ Ay'^2 + Cx'^2 + Dy' + Ex' = 0, \end{cases}$$

qui déterminent les coordonnées des points d'osculation.

En éliminant y' du système (2), l'équation finale en x' sera du quatrième degré, et aura pour racines les abscisses des quatre points d'osculation A, B, C, D.

Or, sans effectuer l'élimination, on peut calculer les coefficients du deuxième et du premier terme de l'équation finale; le rapport, changé de signe, de ces deux coefficients, sera égal à la somme, $\sum x'$, des racines. D'ailleurs, à cause de la racine nulle qui se rapporte au point A, $\sum x'$ sera seulement la somme des abscisses des trois points B, C, D.

Il suffit, en effet, d'appliquer au système (2) la formule générale donnée par M. Merlieux (*voir* tome II, page 35). En y faisant les substitutions et les réductions convenables, on trouve

$$\sum x' = -\frac{3E}{2C} = 3\left(-\frac{E}{2C}\right).$$

Si l'on suppose qu'on élimine, à son tour, x', il faudra, dans la formule, remplacer les coefficients de x'^2 et x' pris dans les équations (2) par ceux de y'^2, y', et *vice versâ* : on aura ainsi

$$\sum y' = 3\left(-\frac{D}{2A}\right),$$

$\sum y'$ étant la somme des ordonnées des trois points B, C, D.

D'autre part, si l'on désigne par X et Y les coordonnées du centre de la conique, on déduit très-simplement de l'équation (1),

$$X = -\frac{E}{2C}, \quad Y = -\frac{D}{2A},$$

et la comparaison de ces valeurs avec les deux égalités précédentes donne

$$\sum x' = 3X, \quad \sum y' = 3Y,$$

relations qui prouvent bien que le centre de la conique est le centre de moyenne distance des trois points B, C, D.

Note. Le centre de la conique est donc le centre de gravité de l'aire du triangle BCD; donc ce triangle est la projection d'un triangle équilatéral inscrit dans le cercle dont l'ellipse est la projection orthogonale. Ainsi, le triangle BCD, lorsqu'il existe, a une aire constante; mais il est possible que deux de ces points deviennent imaginaires : ce qui a lieu lorsque l'équation du troisième degré, résultant de l'élimination, a deux racines imaginaires. Considérons les quatre cercles osculateurs qui passent par B; désignons-les par B, A, M, N. Les quatre points relatifs à C, s'ils existent, seront C, A, M, N, car le point commun A est le sommet du triangle équilatéral elliptique inscrit, et il n'en existe qu'un seul; mais les points B, C, A, M, N devraient être sur la même circonférence, ce qui est impossible. Donc, si le premier triangle AMN est réel, le second est imaginaire, et de même par rapport au point D.