

**Sur la formation de deux séries qu'on
rencontre dans la dissertation suivante
de M. Gauss : « *Summatio quarumdam
serierum singularium* ». D'après M. le
Professeur E. Heine, de Bonn**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 9
(1850), p. 414-417

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1850_1_9_414_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1850, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LA FORMATION

De deux séries qu'on rencontre dans la dissertation suivante de M. Gauss :
Summatio quarundam serierum singularium;

D'APRÈS M. LE PROFESSEUR E. HEINE, DE BONN.

(Journal de M. Crelle, tome XXXIX, page 288; 1850.)

1. *Principe général.* Soit

$$(1) \quad F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n;$$

c'est-à-dire que $F(x)$ est développé suivant une série infinie, n prenant toutes les valeurs entières positives, comprises entre 0 et ∞ . Si $F(x)$ est décomposable en facteurs, et si l'on peut développer chacun de ces facteurs en série infinie, le produit de ces séries est identiquement égal à la série (1); A_n , coefficient de x^n , sera donc égal à la somme des séries qui donnent x^n dans le produit des facteurs.

Ce qui suit est une application de ce principe.

2. *Lemme.*

$$\frac{1}{(1-z)(1-rz)(1-r^2z)} \cdots = 1 + \frac{z}{1-r} \\ + \frac{z^2}{(1-r)(1-r^2)} + \frac{z^3}{(1-r)(1-r^2)(1-r^3)} + \cdots$$

Démonstration. Soit

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)(1-rz)} \cdots = 1 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 \cdots;$$

d'où

$$f(rz) = (1-z)f(z) = 1 + A_1 rz + A_2 r^2 z^2 + \cdots \\ = (1-z)(1 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \cdots).$$

En comparant les coefficients des puissances semblables, on trouve

$$A_1 = \frac{1}{1-r}, \quad A_2 = \frac{1}{(1-r)(1-r^2)} \dots$$

3. THÉORÈME. La série

$$1 - \frac{1-q^n}{1-q} + \frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})}{(1-q)(1-q^2)} - \frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})(1-q^{n-2})}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)} + \dots$$

est nulle lorsque n est *impair*, et lorsque n est *pair* la série est égale à

$$(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\dots(1-q^{n-1}). \quad (\text{GAUSS.})$$

Démonstration. Dans la série du *lemme*, faisons $z = x^2$ et $r = q^2$, nous obtenons

$$\frac{1}{(1-x^2)(1-q^2x^2)(1-q^4x^4)} \dots = 1 + \frac{x^2}{1-q^2} + \frac{x^4}{(1-q^2)(1-q^4)} \dots + \frac{x^n}{(1-q^2)\dots(1-q^n)}.$$

Le premier membre se décompose en deux facteurs, savoir :

$$\frac{1}{(1-x)(1-qx)(1-q^2x)} \dots = 1 + \frac{x}{1-q} + \frac{x^2}{(1-q)(1-q^2)} + \dots$$

$$\frac{1}{(1+x)(1+qx)(1+q^2x)} \dots = 1 - \frac{x}{1-q} + \frac{x^2}{(1-q)(1-q^2)} \dots$$

Faisant le produit, on obtient, pour le coefficient de x^n ,

$$\frac{1}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)} \left[1 - \frac{1-q^n}{1-q} + \frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})}{(1-q)(1-q^2)} - \dots \right].$$

Ainsi, lorsque n est *impair*, le facteur enfermé entre crochets est nul, et lorsque n est *pair*, on obtient (ayant

égard au coefficient A_n donné ci-dessus),

$$1 - \frac{1-q^n}{1-q} + \dots = \frac{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)}{(1-q^2)(1-q^3)\dots(1-q^n)} \\ = (1-q)(1-q^3)\dots(1-q^{n-1}).$$

C. Q. F. D.

4. THÉORÈME. n étant un nombre entier positif, on a

$$1 + \frac{(1-q^n)}{(1-q)} q^{\frac{1}{2}} + \frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})}{(1-q)(1-q^2)} q^{\frac{2}{2}} \\ + \frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})(1-q^{n-2})}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)} q^{\frac{3}{2}} + \dots \\ = \left(1 + q^{\frac{1}{2}}\right) \left(1 + q^{\frac{2}{2}}\right) \left(1 + q^{\frac{3}{2}}\right) \dots \left(1 + q^{\frac{n}{2}}\right). \\ \text{(GAUSS.)}$$

Démonstration. Dans le § 2, faisons $r = q^{\frac{1}{2}}$ et $z = x$; on obtient

$$\frac{1}{(1-x) \left(1-xq^{\frac{1}{2}}\right) \left(1-xq^{\frac{2}{2}}\right)} \dots = 1 + \frac{x}{1-q^{\frac{1}{2}}} + \dots \\ + \frac{x^n}{\left(1-q^{\frac{1}{2}}\right) \dots \left(1-q^{\frac{n}{2}}\right)}.$$

Le premier membre se décompose en deux facteurs, savoir :

$$\frac{1}{(1-x)(1-qx)(1-q^2x)(1-q^3x)} \dots = 1 + \frac{x}{1-q} \\ + \frac{x^2}{(1-q)(1-q^2)} + \dots + \frac{x^n}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)}, \\ \frac{1}{\left(1-q^{\frac{1}{2}}x\right) \left(1-q^{\frac{3}{2}}x\right)} \dots = 1 + \frac{xq^{\frac{1}{2}}}{1-q} \\ + \frac{x^2 q^{\frac{2}{2}}}{(1-q)(1-q^2)} + \dots + \frac{x^n q^{\frac{n}{2}}}{(1-q)\dots(1-q^n)}.$$

Faisant le produit, on obtient, pour le coefficient de x^n ,

$$\frac{1}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)} \left[1 + \frac{1-q^n}{1-q} q^{\frac{2}{1}} + \frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})}{(1-q)(1-q^2)} q^{\frac{2}{2}} + \dots \right].$$

Comparant avec le coefficient A_n ci-dessus, on a

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1-q^n}{1-q} q^{\frac{1}{2}} + \frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})}{(1-q)(1-q^2)} q^{\frac{2}{2}} + \dots \\ = \frac{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)}{\left(1-q^{\frac{1}{2}}\right)\left(1-q^{\frac{2}{2}}\right)\dots\left(1-q^{\frac{n}{2}}\right)} \\ = \left(1+q^{\frac{1}{2}}\right)\left(1+q^{\frac{2}{2}}\right)\left(1+q^{\frac{2}{3}}\right)\dots\left(1+q^{\frac{n}{2}}\right). \end{aligned}$$

C. Q. F. D.

Observation. C'est de ces deux séries que le prince des arithmologues du siècle a déduit la loi de réciprocité pour les restes quadratiques; loi qui a reçu une grande extension par les découvertes de MM. Jacobi, Dirichlet, et par les récents travaux de M. Eisenstein, jeune arithmologue célèbre dès son début, Hermite de l'Allemagne.