NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Théorème de M. Jacobi sur une série

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 9 (1850), p. 410-413

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1850_1_9__410_1>

THÉORÈME DE M. JACOBI SUR UNE SÉRIE.

(Journal de M. Crelle, t. XXI, p. 13; 1840.)

1. Euler a démontré que l'on a

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\ldots = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 \ldots$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^m x^{\frac{3m^2+m}{2}},$$

x est quelconque, et l'on prend pour m successivement tous les nombres entiers compris entre $-\infty$ et $+\infty$; on voit que l'exposant de x est le nombre figuré dit *pentagonal.*

Voici le théorème de M. Jacobi :

THÉORÈME.

$$(1)\quad \left[\sum_{+\infty}^{-\infty}(-1)^m x^{\frac{3m^2+m}{2}}\right]^3 = \sum_0^{\infty}(-1)^n(2n+1)x^{\frac{n^2+n}{2}},$$

où x est quelconque; pour m, on met tous les entiers compris entre $-\infty$ et $+\infty$, et pour n les entiers positifs entre 0 et ∞; de sorte qu'on a

$$[1-x-x^2+x^5+x^7\ldots]^3 = 1-3x+5x^3-7x^6\ldots;$$

les exposants de x, dans le second membre, sont les nombres trigonaux.

Démonstration. Faisons $a=6m+1$, $b=2n+1$; m étant un nombre entier quelconque, positif ou négatif, et n un nombre entier positif; avec ces conditions, on a

$$(2)\quad \sum(-1)^{\frac{a-b}{2}} b(a^2-b^2)x^{\frac{a^2+3b^2}{}} = 0 \quad (\textit{voir}\ \text{p. } 174),$$

$$\frac{a-b}{2} = 3m-n,\quad \frac{a+b}{2} = 3m+n+1,$$

$$a^2-b^2 = 4(3m-n)(3m+n+1),$$

$$(-1)^{\frac{a-b}{2}} = (-1)^{3m-n} = (-1)^{m+n};$$

ainsi l'équation (2) devient

$$(3)\sum(-1)^{m+n}(2n+1)(3m-n)(3m+n+1)x^{(6m+1)^2+3(2n+1)^2} = 0;$$

divisant par x^4, l'exposant de x devient

$$36m^2+12m+3(4n^2+4n);$$

mais x étant quelconque, on peut remplacer x par $x^{\frac{1}{24}}$; alors l'exposant de x devient

$$\frac{3m^2+m}{2}+\frac{n^2+n}{2},$$

et l'équation (3) devient

$$(4)\quad \sum(-1)^{m+n}(2n+1)[3(3m^2+m)-(n^2+n)]x^{\frac{3m^2+m}{2}+\frac{n^2+n}{2}}=$$

De là, on déduit

$$(5)\quad \frac{3\sum(-1)^m(3m^2+m)x^{\frac{3m^2+m}{2}}}{\sum(-1)^m x^{\frac{3m^2+m}{2}}}=\frac{\sum(-1)^n(2n+1)(n^2+n)x^{\frac{n^2+n}{2}}}{\sum(-1)^n(2n+1)x^{\frac{n^2+n}{2}}}$$

ou bien, divisant par $2x$ et multipliant ensuite par dx et intégrant, on obtient

$$\sum(-1)^m x^{\frac{3m^2+m}{2}}=\sum(-1)^n(2n+1)x^{\frac{n^2+n}{2}}.\ \text{C. Q. F. D.}$$

L'illustre analyste déduit de ce qui précède les théorèmes suivants.

THÉORÈME 1. *Soit un nombre entier p de la forme* $24n+3$, *et qui ne soit pas le triple d'un carré; si l'on décompose ce nombre de toutes les manières possibles en trois carrés, chacun de la forme* $(6m\pm 1)^2$, *deux de ces carrés peuvent être égaux; supposez que l'on compte double le cas où les trois carrés sont inégaux; le nombre de décompositions répondant à trois valeurs de m, l'une paire et les deux autres impaires, ou bien toutes les trois paires, est égal au nombre de décompositions correspondant à trois valeurs en m, l'une impaire et les deux autres paires, ou les trois impaires.*

THÉORÈME 2. *Mêmes données et mêmes décompositions que dans le théorème précédent, mais* $p = 3b^2$; *les deux nombres de décompositions égaux dans le précédent théorème ne sont plus égaux; le premier nombre surpasse le second, si b est de la forme* $4+1$, *et le second nombre surpasse le premier, si b est de la forme* $4-1$; *l'excès est égal à* $\frac{1}{3}b$, *si b est divisible par* 3, *et au nombre le plus approché de* $\frac{1}{3}b$, *lorsque b n'est pas divisible par* 3.

THÉORÈME 3. *On peut donner à tout nombre entier la forme*

$$\alpha^2 + 2\beta^2 + 3\gamma^2 + 6\delta^2,$$

où α, β, γ, δ *sont des nombres entiers.*

Observation. Le premier exemple d'une série continue à puissances croissantes, et dont les exposants forment une progression arithmétique du *second* ordre, a été donné par Euler (*Introductio in Analysin, de partitione numerorum*, § CCCXXIII; année 1748), et il en a donné une démonstration rigoureuse dans les Mémoires de l'Académie de Saint-Pétersbourg (tome IV, première partie, 1780, page 41); *voyez* aussi *Théorie des nombres* (tome III, page 128, 3e édition; 1830). M. Jacobi a fait voir que ce théorème découle de sa nouvelle théorie sur les développements des fonctions elliptiques (*Fundamenta*, § LXVI, équation 6, page 185; année 1829); dans ce même immortel ouvrage, l'auteur donne le premier exemple d'une série dont les exposants procèdent suivant la suite pentagonale égale à une série dont les exposants procèdent suivant la suite trigonale (*Fundamenta*, page 186); et il a donné ensuite de ce dernier théorème une démonstration élémentaire que nous avons ci-dessus essayé de faire connaître.