

Lignes du troisième ordre

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 9
(1850), p. 382-386

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1850_1_9_382_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1850, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

LIGNES DU TROISIÈME ORDRE.

Observation. Ces lignes ont des propriétés en commun avec toutes les courbes planes. Pour les trouver, il suffit de faire $n = 3$ dans l'article intitulé : *Propriétés générales des courbes planes* (page 283).

Ici nous ne nous occupons que des propriétés appartenant particulièrement à ces courbes, et, soit dit en passant, c'est ainsi qu'on devrait traiter les *éternelles* courbes du second degré.

1. THÉORÈME. *Si par un point M pris sur la courbe on mène une transversale MNP coupant la courbe en N et P; que l'on prenne sur cette transversale un point O harmonique relativement aux points M, N P; le lieu du point O sera une conique.*

Démonstration. Conséquence d'un théorème général qui sera démontré plus loin.

En voici une démonstration particulière.

Soit $F_3 + F_2 + F_1 = 0$, l'équation de la courbe, les axes étant rectangulaires; l'origine sur la courbe; F indique une fonction à deux coordonnées d'un degré marqué par l'indice. Faisant

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi,$$

on trouve

$$z^2 Q_3 + z Q_2 + Q_1 = 0;$$

le lieu du point harmonique O est donné par l'équation

$$2 Q_1 + Q_2 z = 0, \quad Q_1 z = F_1, \quad Q_2 z^2 = F_2.$$

Repassant aux coordonnées rectangulaires, on a pour

équation du lieu,

$$F_2 + 2F_1 = 0,$$

qui est du second degré. Prenons la tangente en **M** pour axe des x ; l'équation du lieu du point **O** sera de la forme

$$Ay^2 + By + Cx^2 + 2Dy = 0,$$

qui se réduit en un point si l'on a

$$B^2 - 4AC < 0 \quad \text{et} \quad CD^2 = 0,$$

et à deux droites si l'on a

$$B^2 - 4AC > 0 \quad \text{et} \quad CD^2 = 0.$$

Si $D = 0$, l'origine est un point multiple; les deux droites passent par l'origine. Si $C = 0$, l'origine est un point d'inflexion; une des droites touche la courbe à l'origine et l'autre ne passe pas par l'origine.

Remarque. Chaque transversale coupe la conique en deux points; un point correspond à la moyenne harmonique $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{MP} + \frac{1}{MN} \right)$, et l'autre à la moyenne $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{NP} + \frac{1}{NM} \right)$.

Corollaire. La conique coupe la courbe en six points, savoir: un point *double* **M** à l'origine du faisceau, et quatre points simples. Ainsi, par un point donné sur la courbe, on ne peut mener que cinq tangentes à la courbe: une tangente au point même et comptant pour deux, et quatre autres dont les points de contact sont sur une conique qui touche la courbe au point donné. Lorsque le point donné **M** est à l'infini, l'asymptote est la tangente qui passe par le centre du faisceau. Les quatre autres tangentes sont parallèles à cette asymptote, et les quatre points de contact sont sur une hyperbole ayant l'asymptote donnée en commun avec la courbe.

2. THÉORÈME. *Si le point **M** est un point d'inflexion, la conique se réduit à deux droites dont l'une est la tangente en **M**.* (CHASLES.)

Démonstration. Prenons la tangente en M pour axe des x ; alors F_2 et F_1 sont de la forme

$$F_2 = Ay^2 + Bxy, \quad F_1 = Dy.$$

Donc le lieu du point O est représenté par

$$Ay^2 + Bxy + 2Dy = 0;$$

d'où

$$y = 0, \quad Ay + Bx + 2D = 0, \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Corollaire. Par un point d'inflexion, on ne peut mener que trois tangentes; les points de contact sont sur la droite dont l'équation est

$$Ay + Bx + 2D = 0.$$

3. THÉORÈME. Par le point d'inflexion M, menons une transversale coupant la courbe en deux points P et Q, les tangentes en P et Q se coupent en un point qui est sur la droite représentée par

$$Ay + Bx + 2D = 0 \quad (\text{théorème précédent}).$$

Démonstration. Les tangentes en P et Q rencontrent la courbe en P' et Q'; les trois points M, P', Q' sont en ligne droite (théorème 4 ci-dessous); soient O et O' les centres harmoniques sur la transversale MPQ, MP'Q'; ces centres sont la droite

$$Ay + Bx + 2D = 0;$$

et, d'après la propriété du quadrilatère, les intersections des droites PP', QQ' sont aussi sur cette droite.

C. Q. F. D.

4. THÉORÈME. Une transversale coupant la courbe en trois points, si, en ces points, on mène des tangentes, elles coupent la courbe chacune en un point, et les trois points sont en ligne droite.

Démonstration. Conséquences du théorème général (voir page 287, théorème 12).

5. THÉORÈME. *Une ligne du troisième degré a neuf points d'inflexion, sur le nombre desquels il y en a nécessairement un de réel et au plus trois points qui sont toujours en ligne droite.*

Démonstration. Les coordonnées des points d'inflexion sont les racines d'une équation du neuvième degré (voir page 294); il y a donc au moins une racine réelle. Supposons qu'il y ait plus d'une racine réelle. Soient I et I' deux points d'inflexion; la droite II' rencontre la courbe en un troisième point I''; les tangentes menées en I, I', I'' rencontrent la courbe en trois points qui sont sur une ligne droite, dite *droite de rencontre* (théorème 4). Or les tangentes aux points d'inflexion I et I' ont un point de contact *triple*; donc I et I' se confondent avec les points de rencontre. Ainsi la droite II'I'' est elle-même la droite de rencontre; donc I'' est aussi un point d'inflexion. Soit I''' un quatrième point d'inflexion; il est nécessairement hors de la droite II'I''. Chacune des droites II''I''', I'I''', I''I''' donnerait un nouveau point d'inflexion, et, en continuant, on obtiendrait un nombre indéfini de points d'inflexion; donc il n'existe pas de quatrième point réel d'inflexion.

• *Observation.* Prenons un point d'inflexion pour origine des coordonnées. Les six points d'inflexion imaginaires fournissent trois droites réelles (voir tome V, page 423) qui passent par l'origine.

6. THÉORÈME. *Si, par un point M, on mène trois droites, et si l'on prend deux points sur chaque droite; par ces sept points, passent une infinité de lignes du troisième ordre. Si le point M est un point d'inflexion pour une de ces courbes, il sera aussi un point d'inflexion pour toutes ces courbes.* (HART.)

Démonstration. Prenons sur chacune des trois droites le centre harmonique relativement au point M; puisque ce point est d'inflexion dans une de ces courbes, les trois

centres sont sur une même droite (théorème 2). Mais cette droite reste la même pour toutes les courbes ; donc, réciproquement, le point M est un point d'inflexion pour toutes les courbes (théorème 2).

7. THÉORÈME. *Si, par les neuf points d'inflexion d'une ligne du troisième ordre, on fait passer une seconde courbe du même ordre, ces neuf points seront aussi les points d'inflexion de la seconde courbe.* (HESSE.)

Démonstration. Par chaque point d'inflexion passent quatre rayons renfermant chacun deux points d'inflexion (théorème 5, observation). On est donc ramené au théorème précédent.

Remarque. Le théorème est de M. Hesse, professeur à l'Université de Kœnigsberg, en Prusse, et il se trouve dans le beau mémoire géométrico-analytique sur les fonctions du troisième ordre. (CRELLE, tomes XXVIII, XXXVII, XXXVIII.) Ce moyen ingénieux de démonstration appartient à M. Hart, professeur à l'Université de Dublin (CRELLE, tome XXXIX, page 365, 1849, en français).

(Suite.)