JULES ROUGET

Solution de la première question du concours d'agrégation

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 9 (1850), p. 349-351

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1850_1_9__349_1>

SOLUTION DE LA PREMIÈRE QUESTION DU CONCOURS D'AGRÉGATION

(voir p. 342),

PAR M. JULES ROUGET,
Professeur.

Les équations qui donnent le centre de courbure sont

$$(x'-x)\,dx+(y'-y)\,dy+(z'-z)\,dz=0,$$
$$(x'-x)\,d^2x+(y'-y)\,d^2y+(z'-z)\,d^2z=ds^2,$$
$$(x'-x)(dy\,d^2z-dz\,d^2y)+(y'-y)(dz\,d^2x-dx\,d^2z)$$
$$+(z'-z)(dx\,d^2y-dy\,d^2x)=0,$$

dont les deux premières représentent deux plans normaux consécutifs et la troisième le plan osculateur au point x, y, z. Si, entre ces équations et les deux équations de la courbe donnée, on élimine x, y, z, on aura les équations du lieu des centres de courbure : l'équation de l'arête de rebroussement s'obtiendrait en éliminant x, y, z entre les équations de la courbe proposée, les deux premières équations ci-dessus et l'équation suivante, qui s'obtient en différentiant la seconde, et traitant l'arc s comme la variable indépendante

$$(x'-x)\,d^3x+(y'-y)\,d^3y+(z'-z)\,d^3z=0.$$

La question revient donc à démontrer que cette équation est vérifiée par les coordonnées x', y', z' du centre de courbure, lorsque ce rayon de courbure est constant, c'est-à-dire lorsque

$$\begin{aligned}(dyd^2z-dzd^2y)^2+(dzd^2x-dxd^2z)^2&\\ +(dxd^2y-dyd^2x)^2&=\text{const.},\end{aligned}$$

ce qui est le cas actuel, puisqu'en appelant ρ le rayon de courbure, on a toujours

$$\rho=\frac{ds^3}{\sqrt{(dyd^2z-dzd^2y)^2+(dzd^2x-dxd^2z)^2+(dxd^2y-dyd^2x)^2}};$$

or on sait, par des formules connues, que les valeurs de $x'-x$, $y'-y$, $z'-z$ relatives au centre de courbure, sont les suivantes :

$$x'-x=\frac{\rho^2}{ds^4}\left[dy\,(dyd^2x-dxd^2y)+dz\,(dzd^2x-dxd^2z)\right],$$

$$y'-y=\frac{\rho^2}{ds^4}\left[dz\,(dzd^2y-dyd^2z)+dx\,(dxd^2y-dyd^2x)\right],$$

$$z'-z=\frac{\rho^2}{ds^4}\left[dx\,(dxd^2z-dzd^2x)+dy\,(dyd^2z-dzd^2y)\right].$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'équation

$$(x'-x)\,d^3x+(y'-y)\,d^3y+(z'-z)\,d^3z=0,$$

elle devient

$$\begin{aligned}&(dyd^3x - dxd^3y)(dyd^2x - dxd^2y)\\ &+ (dzd^3y - dyd^3z)(dzd^2y - dyd^2z)\\ &+ (dxd^3z - dzd^3x)(dxd^2z - dzd^2x) = 0,\end{aligned}$$

équation différentielle exacte qui, intégrée, donne

$$\begin{aligned}&(dyd^2x - dxd^2y)^2 + (dzd^2y - dyd^2z)^2\\ &\qquad + (dxd^2z - dzd^2x)^2 = \text{const.},\end{aligned}$$

ce qui est précisément l'hypothèse. Cette hypothèse est donc nécessaire; réciproquement, si elle a lieu, la conséquence géométrique s'ensuit. (*Voir* tome VI, page 226; tome IV, pages 606 et 266; Moigno, *Calcul différentiel*, page 314.)

Cette solution nous a été remise le 23 *août au matin, lendemain de la composition.*

Avis sur les concours d'agrégation.

Nous donnerons les solutions de toutes les questions proposées dans ces concours jusqu'à ce jour, et même plusieurs solutions de la même question, lorsqu'elles différeront essentiellement. Nous engageons MM. les agrégés à nous adresser leurs travaux, qui seront naturellement insérés de préférence, puisqu'ils ont l'approbation du jury.