

LEBESGUE

Quelques mots sur la géométrie sphérique

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 9
(1850), p. 327-329

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1850_1_9__327_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1850, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

QUELQUES MOTS SUR LA GÉOMÉTRIE SPHÉRIQUE;

PAR M. LEBESGUE.

1. Puisque de nombreuses propositions sur les figures planes passent de la surface sphérique à la surface plane avec ou sans modification, il semble que les auteurs d'Éléments de géométrie auraient dû donner les propositions vraies dans les deux cas, sauf à établir ensuite la modification pour la surface plane.

Ainsi, de la propriété du triangle isocèle, on tirera sans difficulté ce théorème :

Tout polygone plan ou sphérique d'un nombre de côtés pairs, convexe et inscrit, est toujours tel, que la somme des angles de rangs impairs est égale à celle des angles de rangs pairs.

Corollaire. Pour le quadrilatère plan, la somme des angles opposés vaut deux droits, puisque la somme des quatre angles vaut quatre droits.

2. THÉORÈME. *Dans un triangle inscrit, plan ou sphérique, deux sommets A, B étant fixes et le troisième C mobile, la somme $A + B - C$ est constante.*

Cela se tire facilement de la proposition du triangle isocèle.

Corollaire. Pour le triangle plan, C est constant puisque

$$A + B - C \quad \text{et} \quad A + B + C = 2d$$

sont des quantités constantes.

3. Il serait facile de multiplier les théorèmes sur les polygones inscrits et circonscrits. Je me borne à faire voir comment le théorème précédent donne de suite un théorème de Lexell sur les triangles sphériques équivalents.

Pour que l'aire du triangle sphérique ABC de base donnée AB soit constante, il faut qu'en représentant par A, B, C les axes de grand cercle qui mesurent les angles A, B, C, et par 4Q la circonférence du grand cercle, on ait

$$A + B + C - 4Q$$

constant.

Or si l'on conçoit les diamètres AOA', BOB', où O est le centre de la sphère; dans le triangle sphérique A'B'C, on aura évidemment

$$A = 2Q - A', \quad B = 2Q - B';$$

de sorte que

$$A + B + C - 4Q = C - (A' + B').$$

Ce qui montre que le triangle CA'B', qui a deux sommets fixes, est inscrit dans le même cercle, quel que soit le point C.

En effet,

$$C = A'CP + PCB' = CA'P + CB'P = A' + B' + 2PA'B',$$

où P est le pôle du triangle CA'B',

$$C - (A' + B') = 2PA'B',$$

ce qui détermine le pôle indépendamment de toute position particulière du point C.

Cette démonstration revient, je crois, à celle de M. Steiner (*voir* tome IV, page 587 ; tome V, page 22).

4. De même, dans la solution des problèmes, les auteurs d'Éléments auraient dû conserver les constructions qui s'appliquent également aux figures planes et aux sphériques.

Voici une construction pour la tangente au cercle par un point extérieur A.

Construction d'Euclide.

Du point O centre du cercle, avec le rayon OA, décrivez le cercle concentrique ; par le point D, où OA coupe la circonférence, menez la perpendiculaire DC à OD, coupant la grande circonférence en C ; tirez OC coupant la petite circonférence en B ; AB sera la tangente.

Cette proposition s'étend à la sphère, OA et DC étant des arcs de grands cercles perpendiculaires.

On donne ordinairement une construction fondée sur la propriété de l'angle inscrit, on décrit un demi-cercle sur le diamètre OA, ce qui détermine les points de contact ; cette construction n'est plus bonne pour la sphère. Il semble que la construction d'Euclide, qui revient à construire un triangle rectangle dont l'hypoténuse est OA, aurait pu rester dans les Éléments.

