NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

P. SERRET

Démonstration des théorèmes de M. Strebor sur les paraboles homofocales

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 9 (1850), p. 320-321

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1850_1_9__320_0>

DEMONSTRATION DES THÉORÈMES DE M. STREBOR SUR LES PARABOLES HOMOFOCALES;

PAR M. P. SERRET,
Élève de l'ecole Normale.

Lemme 1. Soient, dans un même plan, une droite L et un axe ox sur lequel est pris un point fixe o. Menons, du point fixe o, un rayon vecteur ol de la droite L; puis, par le même point o, menons une droite om qui fasse, avec ox, un angle mox double de l'angle lox, et portons enfin, sur cette droite om, une longueur om proportionnelle au carré du rayon vecteur ol $\left(om = \frac{ol^2}{k}\right)$.

L'extrémité m de cette droite om décrira une parabole ayant son foyer au point o. (Chasles, *Aperçu historique*, page 852.)

Démonstration. En se servant des coordonnées polaires, on reconnaît immédiatement, dans l'équation de la courbe dérivée, l'équation d'une parabole dont le foyer est l'origine, c'est-à-dire le point fixe o.

Observation. Etant données plusieurs droites L, L', etc., sur un plan; si nous appliquons à ces droites la transformation du lemme 1, relativement au même point o et au même axe ox, nous obtiendrons des paraboles P, P', etc., ayant leur foyer en o, et que nous appellerons *correspondantes* des droites L, L', etc., *dans le même système métamorphique*.

Lemme 2. L'angle sous lequel se coupent deux paraboles homofocales est égal à l'angle des droites auxquelles elles correspondent.

Démonstration. En effet, 1° l'angle de deux paraboles homofocales est moitié de l'angle de leurs axes focaux; 2° on peut voir immédiatement, par l'équation de la parabole correspondante à une droite L, que l'angle des axes de deux paraboles homofocales est double de l'angle des droites correspondantes. La même chose s'aperçoit plus facilement encore par des considérations géométriques. Donc l'angle des droites est bien égal à l'angle des paraboles correspondantes.

Conséquences. 1°. Il résulte immédiatement de là que tous les théorèmes de collinéation sur des droites s'appliquent immédiatement aux paraboles homofocales. Prenant, en particulier, les théorèmes connus sur les hauteurs et les bissectrices d'un triangle, on retrouve les théorèmes énoncés par M. Strebor (*voir* t. VII, p. 397).

2°. Dans le système métamorphique actuellement considéré, à un cercle dans le système primitif correspond un ovale de Descartes dans le système dérivé (*Aperçu historique*, note XXI, page 351). Donc, invoquant l'égalité des angles inscrits dans un même segment de cercle, on a le théorème suivant, donné par M. Strebor.

THÉORÈME. *Si deux arcs de paraboles circonfocales passent respectivement par deux points fixes et se coupent sous un angle constant, leur point d'intersection décrira un ovale de Descartes.*

Observation. Tous les théorèmes précédents sont contenus dans la note XXI (pages 350-352) de l'*Aperçu historique* de M. Chasles. La dernière proposition y est énoncée tout au long, à cette seule différence près, que l'angle des paraboles est remplacé, dans l'énoncé, par l'angle de leurs axes; ce qui revient au même, comme nous l'avons dit. Quant au lemme 2, il est aussi renfermé implicitement dans la même note.
