JULLIEN

CLAUDE

Solution de la question 223

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 9 (1850), p. 265-267

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1850_1_9__265_0>

SOLUTION DE LA QUESTION 223

(voir t IX, p. 150);

PAR MM. LES ABBÉS JULLIEN ET CLAUDE,
Professeurs au séminaire de Vals.

1. *Définition.* a_1, a_2, a_3, a_4 étant quatre points se succédant dans cet ordre sur une droite, le rapport segmentaire $\frac{a_2a_3 \cdot a_1a_4}{a_1a_2 \cdot a_3a_4}$ est nommé *rapport anharmonique.*

2. *Lemme.* Un faisceau plan de quatre droites étant coupé par deux transversales, le rapport anharmonique formé sur l'une des transversales est égal au rapport anharmonique formé sur la seconde transversale.

3. *Lemme.* a_1, a_2, a_3, a_4 étant quatre points se succédant dans cet ordre, sur une droite, et de même b_1, b_2, b_3, b_4, quatre points sur une autre droite, on suppose que les deux rapports anharmoniques sont égaux. Si les trois droites a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3 passent par un même point, la quatrième droite a_4b_4 passera aussi par ce point.

4. PROBLÈME. a_1, a_2, a_3 *étant trois points placés sur une droite; b_1, b_2, b_3 étant trois autres points situés sur une autre droite; on propose de placer ces deux droites de manière que les trois droites a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3 passent par le même point.*

Solution. Par un point quelconque O, menons les trois droites Oa_1, Oa_2, Oa_3; sur b_1b_2 décrivons un segment capable de l'angle a_1Oa_2, et sur b_2b_3, un second segment capable de l'angle a_2Oa_3; soit O' l'intersection des deux arcs. On pourra placer cette seconde figure sur la première, dans deux positions différentes qui résolvent le problème, lequel est susceptible d'une infinité de solutions.

5. Problème. *Quatre points* a_1, a_2, a_3, a_4 *sont sur une ligne droite, de même que les quatre points* b_1, b_2, b_3, b_4; *on propose de placer les deux droites de telle sorte que les quatre droites qui réunissent les points de même indice passent par le même point.*

Solution. Si les rapports anharmoniques fournis par les deux droites ne sont pas égaux, le problème est impossible; s'ils sont égaux, on place les droites dans une position telle, que les droites $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, $a_3 b_3$ se coupent en un point (problème 4). Alors, la droite $a_4 b_4$ passe aussi par ce point (lemme 3).

6. Question 223. *n points* a_1, a_2, $a_3, \ldots, a_n$ *sont placés sur une droite; n autres points* b_1, $b_2, \ldots, b_n$ *sont placés sur une autre droite; dans quel cas pourra-t-on mettre les deux droites dans une telle position, que les lignes de jonction* $a_1 b_1$, $a_2 b_2, \ldots, a_n b_n$ *convergent vers le même point?*

Solution. Pour que le problème soit possible, il faut que quatre points successifs de la ligne des a donnent le même rapport anharmonique que les quatre points correspondants de la ligne des b (lemme 2). Cette condition étant remplie, on place les droites de telle sorte, que les droites de jonction de trois points consécutifs de la ligne des a aux points correspondants de la ligne des b, convergent vers le même point (problème 4); les autres lignes de jonction convergeront aussi vers ce point (lemme 3).

Le problème admet donc une infinité de solutions.

Observation. Lorsqu'un segment quelconque de la droite des a divisé par le segment correspondant de la droite des b, donne constamment le même quotient, les droites de jonction sont parallèles et le centre de convergence est à l'infini.

Autrement. Supposons le problème résolu. Soit O le centre de convergence; menons par O une parallèle à la droite des b rencontrant la droite des a en A, et par le même point O une parallèle à la droite des a, rencontrant la droite des b en B. Le produit $Aa_p \times Bb_p$, où p désigne un indice quelconque, est constant (*voir* page 146); A a pour correspondant un point situé à l'infini sur la ligne des b, et B a pour correspondant un point situé à l'infini sur la ligne des a. Sans mettre les droites dans une position perspective, prenons sur la droite des a un point quelconque A, et déterminons sur la droite des b un point B tel, que l'on ait

$$Aa_1 . Bb_1 = Aa_2 . Bb_2;$$

ce qui est possible, puisqu'on a encore l'équation du premier degré

$$Bb_2 - Bb_1 = b_1 b_2.$$

On devra avoir

$$Aa_p . Bb_p = Aa_1 . Bb_1,$$

quel que soit p, sans cela le problème est impossible. Étant donc donné un point a_r sur la ligne des a, on pourra tracer, à l'aide des points A et B, le point correspondant b_r, sans avoir besoin de mettre les droites dans une position perspective; si ensuite on place a_r sur b_r, les droites seront dans une position perspective.

Si $Aa_r = Bb_r$ et si l'on pose b_r sur a_r et B sur A, les points $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ sont alors dits être en *involution*, et le point A prend le nom de *centre d'involution*.

Observation. Les segments Aa_p et Bb_p peuvent être considérés comme des coordonnées d'une hyperbole rapportée à ses asymptotes. Ce genre de problèmes perspectifs se ramène à des problèmes sur cette courbe considérée relativement à ses asymptotes (*).

(*) C'est aussi la théorie des *points réciproques;* nom très-expressif.