Nouvelles annales de mathématiques

Abel Transon

Démonstration de quelques théorèmes d'algèbre

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 9 (1850), p. 255-260

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1850_1_9__255_1>

DÉMONSTRATION DE QUELQUES THÉORÈMES D'ALGÈBRE;

PAR M. ABEL TRANSON.

1. Le dernier terme d'une suite surpasse le premier, de la somme de toutes les différences entre deux termes consécutifs.

Ce principe évident procure la démonstration de plusieurs résultats utiles (*).

Soit, premièrement, la suite

$$1^{m+1},\quad 2^{m+1},\quad 3^{m+1},\ldots,\quad n^{m+1},\quad (n+1)^{m+1}.$$

La différence entre deux termes consécutifs

$$x^{m+1},\quad (x+1)^{m+1}$$

étant égale à

$$(m+1)x^m + \frac{m+1.m}{1.2}x^{m-1} + \ldots + 1,$$

(*) Cette identité sert de base au calcul aux différences, et par conséquent à la sommation des suites dont il va être question. TM.

il suit du principe énoncé qu'on a la relation

$$(n+1)^{m+1} = 1 + (m+1)S_m + \frac{(m+1)m}{1.2} S_{m-1} + \ldots + \frac{m+1}{1} S_1 + S_0;$$

équation où l'on représente par S_p la somme des puissances p des nombres naturels, depuis l'unité jusques et y compris celle de n, ou n^p.

De là

$$(1)\quad S_m = \frac{(n+1)^{m+1}-1}{m+1} - \frac{m}{2} S_{m-1} - \frac{m.m-1}{2.3} S_{m-2} - \ldots - S_1 - \frac{S_0}{m+1}.$$

Au lieu de considérer d'abord les sommes des puissances $(m+1)$ des nombres naturels, on aurait pu prendre les puissances des termes consécutifs d'une progression arithmétique quelconque, et l'on aurait trouvé la formule par la somme des puissances des termes d'une telle progression, que M. Lionnet a donnée (*Nouvelles Annales*, tome I, page 175), et qu'il préfère, avec raison, à celle des Traités élémentaires d'algèbre.

On peut trouver une formule beaucoup plus simple pour les sommes de puissances impaires.

2. Considérons la suite

$$0.1^{m+1},\quad 1^{m+1}.2^{m+1},\quad 2^{m+1}.3^{m+1}, \ldots,\quad n^{m+1}(n+1)^{m+1}.$$

La différence de deux termes consécutifs est

$$x^{m+1}[(x+1)^{m+1} - (x-1)^{m+1}]$$
$$= 2.x^{m+1}\left[(m+1)x^m + \frac{m+1.m+m-1}{1.2.3} x^{m-2} + \ldots\right];$$

d'où il suit, toujours en vertu du même principe et en ayant égard à la relation $n(n+1) = 2S_1$,

$$2^m (S_1)^{m+1} = (m+1) S_{2m+1} + \frac{m+1.m+(m-1)}{1.2.3.} S_{2m-1}$$
$$+ \frac{m+1.m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4.5} S_{2m-3} + \ldots,$$

ou bien

$$(2)\quad S_{2m+1} = \frac{2^m (S_1)^{m+1}}{m+1} - \frac{m^{2|-1}}{2^{2|1}} S_{2m-1} - \frac{m^{4|-1}}{2^{4|1}} S_{2m-3} \ldots$$

J'emploie ici, pour abréger, la notation adoptée par Kramp pour des produits de facteurs croissant ou décroissant en progression arithmétique, produits que ce géomètre appelle, comme on sait, des *facultés*.

D'après cette notation, on a en général

$$a(a+h)(a+2h)\ldots[a+(n-1)h] = a^{n|h};$$

l'exposant n de la faculté indique le nombre de facteurs, comme l'exposant d'une puissance, et la raison h peut être positive ou négative. Dans le cas de $h = 0$, la faculté devient une puissance.

La formule (2) présente, comme on voit, moitié moins de termes à calculer que la formule (1); et, en particulier, pour $m = 1$, elle donne tout de suite le résultat si remarquable et d'ailleurs bien connu

$$S_3 = (S_1)^2.$$

3. *Nombres figurés.* La somme des termes de la suite naturelle

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ldots,$$

donne lieu à la suite des nombres *triangulaires*

$$1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ 21,\ 28,\ldots,$$

ainsi nommés parce qu'on peut ranger en triangles autant de points qu'ils contiennent d'unités. En ajoutant les nombres triangulaires, on forme les nombres *pyramidaux*

$$1,\ 4,\ 10,\ 20,\ 35,\ 56,\ 84,\ldots;$$

suite dont chaque terme représente, comme on sait, le nombre des boulets d'une pile triangulaire, qui a pour côté le dernier nombre triangulaire compris dans le pyramidal que l'on considère. Si l'on ajoute les nombres pyramidaux, on a une nouvelle suite, dont on peut, de nouveau, additionner les termes; et, en continuant ainsi indéfiniment, on a tous les *nombres figurés* (ceux au moins du *premier ordre* qui dépendent de la progression naturelle).

Or on sait qu'à l'aide de ces nombres on peut établir la loi du binôme à exposant entier et positif, d'une manière certainement plus directe et au moins aussi simple que par la considération des combinaisons. J'ose dire que cette démonstration du binôme qu'on trouve dans les anciens Traités d'algèbre mériterait bien d'être plus connue des élèves. Il peut donc y avoir quelque utilité à montrer combien aisément la formule des nombres figurés se déduit du principe énoncé au début de cet article.

Considérons la suite de facultés du second ordre

$$0.1,\ 1.2,\ 2.3,\ 3.4,\ldots,\ (n-1)n,\ n(n+1).$$

Comme la différence de deux termes consécutifs est égale au *double* du facteur qui leur est commun, on a immédiatement

$$n.\overline{n+1} = 2\sum x,$$

ou bien

$$\sum n = \frac{n.\overline{n+1}.}{2}:$$

ce qui est la somme des nombres naturels jusqu'à n, ou, autrement, le nombre triangulaire dont le côté est n.

Considérons de nouveau les facultés de troisième ordre

$$0.1.2,\ 1.2.3,\ 2.3.4,\ldots,\ (n-1)n(n+1),\ n(n+1)(n+2).$$

Comme la différence de deux termes consécutifs est égale à *trois fois* le produit des facteurs qui leur sont communs, on en conclura

$$\sum n(n+1) = \frac{n.n+1.n+2}{3},$$

et, par conséquent,

$$\sum \frac{n\ n+1}{2} = \frac{n\ n+1.n+2}{2.3};$$

ce qui est l'expression du nombre pyramidal dont le côté est n.

Plus généralement, si l'on considère les facultés du $(m+1)^{ième}$ ordre, c'est-à-dire à $(m+1)$ facteurs, à partir de celle dont le premier facteur est zéro et qui est nulle, jusqu'à la $(n+1)^{ième}$ dont le premier facteur est n, on verra que la différence de deux termes consécutifs est égale à $(m+1)$ *fois* le produit des m facteurs qui leur sont communs; et de là, toujours à l'aide du même principe,

$$\sum n(n+1)\ldots(n+m-1) = \frac{n.\,n+1\,(n+2)\ldots(n+m)}{m+1},$$

et, par conséquent,

$$\sum \frac{n(n+1)\ldots(n+m-1)}{1.2.3.\ .m} = \frac{n.n+1.n+2\ldots(n+m)}{1.2.3\ldots m(m+1)};$$

ce qui est la formule pour le nombre figuré du $(m+1)^{ième}$ ordre.

Note. On démontre le binôme à exposant entier négatif, de la même manière que le binôme à exposant entier positif, en remplaçant les combinaisons *sans répétitions* par des combinaisons *avec répétitions;* de sorte que les coefficients sont encore des *nombres figurés* ordinaires. Lorsque l'exposant est fractionnaire, il s'agit de trouver une série telle, qu'en élevant cette série à une puissance entière, on obtienne une série dont les coefficients soient des *nombres figurés*; on démontre que les coefficients de la série cherchée sont encore des *nombres figurés*, mais à base fractionnaire : c'est l'immortelle découverte de Newton. Tm.