NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Arithmologie. Théorème. a étant un nombre positif ou négatif de la forme $\dot{6}+1$; b un nombre positif de la forme $\dot{2}+1$ et x une quantité quelconque on a l'équation $\sum(-1)^{\frac{a-b}{2}}b(a^2-b^2)x^{a^2+3b^2}=0$

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 9 (1850), p. 174-177

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1850_1_9__174_1>

ARITHMOLOGIE.

THÉOREME. *a étant un nombre positif ou négatif de la forme $\dot{6}+1$; b un nombre positif de la forme $\dot{2}+1$ et x une quantité quelconque, on a l'équation*

$$\sum (-1)^{\frac{a-b}{2}} b(a^2-b^2)x^{a^2+3b^2} = 0\ (^*).$$

(JACOBI. Crelle, tome XXI, page 13; 1840.)

Démonstration. Il suffit de démontrer que la somme des termes où x a le même exposant est nulle. Faisons

$$a^2+3b^2 = a'^2+3b'^2;$$

on satisfait, comme on sait, à cette équation par les *huit* valeurs suivantes :

$$a' = \pm\frac{a-3b}{2},\qquad b' = \pm\frac{a+b}{2},$$
$$a' = \pm\frac{a+3b}{2},\qquad b' = \pm\frac{a-b}{2}.$$

Mais, d'après l'hypothèse, pour que $x^{a'^2+3b'^2}$ appartienne à la série, il faut que a', positif ou négatif, soit de la forme $\dot{6}-1$, et que b' soit positif et de la forme $\dot{2}+1$; ces conditions vont réduire le nombre de ces valeurs à une seule.

En effet, a étant impair, il n'y a que ces deux cas pos-

(*) Nous mettons le point leibnitzien pour indiquer un multiple.

sibles :

Premier cas. $\frac{a+b}{2}$ pair, $\frac{a-b}{2}$ impair,

Deuxième cas. $\frac{a+b}{2}$ impair, $\frac{a-b}{2}$ pair.

Représentons par $\frac{a+\varepsilon b}{2}$ les *impairs* de ces quatre nombres : alors à $\varepsilon = +1$ correspond le deuxième cas, et à $\varepsilon = -1$ correspond le premier cas; donc

$$\varepsilon = (-1)^{\frac{a-b}{2}}.$$

Comme b' est impair, on a donc

$$b' = \pm \frac{a+\varepsilon b}{2};$$

le nombre correspondant de a' est donc

$$a' = \pm \frac{a-3\varepsilon b}{2}$$

(on change b en $-\varepsilon b$) : mais b' devant être positif, nous pouvons écrire

$$a' = \pm \frac{a-3\varepsilon b}{2}, \qquad b' = \varepsilon' \frac{a+\varepsilon b}{2},$$

ε' étant $= +1$ lorsque $\frac{a+\varepsilon b}{2}$ est positif, et $\varepsilon' = -1$ lorsque $\frac{a+\varepsilon b}{2}$ est négatif.

Si dans a' nous prenons le signe supérieur, alors $2a' - a$ devient divisible par 3 : mais a et a' étant tous de la forme $\dot{6}+1$, $2a' - a$ divisé par 3 laisse pour reste 1 ; le signe supérieur doit donc être rejeté; on a donc

$$a' = -\frac{a-3\varepsilon b}{2}.$$

$2a' + a$ est divisible par 3, et a étant de la forme $\dot{6} + 1$, $2a'$ est de la forme $\dot{3} + 2$, et par conséquent a' de la forme $\dot{3} + 1$. Or on a

$$2b'\varepsilon' = a + b\varepsilon \quad (\text{car } \varepsilon'^2 = 1), \quad \text{et} \quad 2a' = 3b\varepsilon - a;$$

donc

$$a' + b\varepsilon' = 2b\varepsilon.$$

b étant impair, a' est donc aussi impair; donc a' est de la forme $\dot{6} + 1$. Ainsi

$$(1) \qquad a' = \frac{3\varepsilon b - a}{2}, \qquad b' = \varepsilon' \frac{a + \varepsilon b}{2};$$

on en déduit

$$(2) \qquad a = \frac{3b'\varepsilon' - a'}{2}, \qquad b = \varepsilon \frac{a' + \varepsilon' b'}{2}.$$

Les équations (2) sont de la même forme que les équations (1), ε et ε' ont changé de rôle; et comme b doit être impair, on voit que, pour $\varepsilon' = +1$, $\frac{a' + b'}{2}$ est impair, et $\frac{a' - b'}{2}$ pair; et pour $\varepsilon' = -1$, $\frac{a' - b'}{2}$ est impair et $\frac{a' + b'}{2}$ est pair; donc

$$\varepsilon' = (-1)^{\frac{a' - b'}{2}}.$$

Les équations (2) montrent que les mêmes opérations par lesquelles on a déduit a' et b' de a et de b, conduiraient de a' et b' vers a et b; les deux systèmes de valeurs a, b et a' et b' ont donc une relation de réciprocité, et, en continuant les opérations, on reviendrait aux précédentes valeurs. Il suffit donc, pour la démonstration, que les deux coefficients de $x^{a^2 + 3b^2}$ et de $x^{a'^2 + 3b'^2}$ soient égaux et de signes opposés.

La somme de ces coefficients est

$$(-1)^{\frac{a-b}{2}} b(a^2-b^2)+(-1)^{\frac{+a'-b'}{2}} b'(a'^2-b'^2).$$

Substituant pour a' et b' les valeurs tirées de l'équation (1), on a

$$a'^2-b'^2=-2\varepsilon b(a-\varepsilon b),$$

et de là

$$b'(a'^2-b'^2)=-\varepsilon\varepsilon' b(a^2-b^2);$$

la somme des coefficients devient donc

$$b(a^2-b^2)\left[(-1)^{\frac{a-b}{2}}-\varepsilon\varepsilon'(-1)^{\frac{a'-b'}{2}}\right].$$

Mais

$$\varepsilon=(-1)^{\frac{a-b}{2}},\qquad \varepsilon'=(-1)^{\frac{a'-b'}{2}},$$

d'où

$$\varepsilon\varepsilon'(-1)^{\frac{a'-b'}{2}}=(-1)^{\frac{a-b}{2}};$$

donc cette somme est nulle. C. Q. F. D.

Observation. Le cas peut se présenter où $a'=a$ et $b'=b$; alors la première des équations (2) donne

$$a=b\varepsilon;\quad \text{donc}\quad a^2-b^2=0;$$

ce qui vérifie évidemment le théorème.