Théorème de M. Joachimsthal sur l'intersection de deux coniques

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 9 (1850), p. 169-171

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1850_1_9__169_1>

THÉORÈME DE M. JOACHIMSTHAL SUR L'INTERSECTION DE DEUX CONIQUES.

(Journal de M. Crelle, tome XXXVI, page 196; 1848.)

I. *Lemme.* Toutes les racines d'une équation algébrique peuvent être représentées par des tangentes d'arcs réels ou imaginaires; une fonction symétrique de ces arcs est une quantité réelle.

II. *Lemme.* Soit

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m = 0$$

une équation algébrique de degré m; si l'on a

$$A_1 - A_3 + A_5 - A_7 + \ldots = 0,$$

la somme des arcs-racines est un multiple de π; et si l'on a

$$A_0 - A_2 + A_4 - A_6 + \ldots = 0,$$

la somme des arcs-racines est un multiple de $\frac{\pi}{2}$.

La démonstration est fondée sur la formule connue qui exprime la tangente de la somme des m arcs, et sur les relations newtonniennes entre les coefficients d'une équation et les racines.

III. *Lemme.* Deux coniques situées dans un même plan ont un système d'axes conjugués en commun.

IV. Soient, dans un même plan, deux coniques à centre; prenons pour axes coordonnées le système commun d'axes *conjugués,* et pour origine le centre de l'une de ces coniques : les équations de ces courbes seront de la forme

$$(1)\quad \begin{cases} a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0, \\ Ay^2 + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0 \end{cases}$$

Faisons dans la première équation $x = a\cos\alpha$, nous aurons $y = b\sin\alpha$; dans les points communs aux deux coniques, ces valeurs doivent aussi satisfaire à la seconde équation. Faisant la substitution, on obtient

$$Ab^2\sin^2\alpha + Ca^2\cos^2\alpha + Db\sin\alpha + Ea\cos\alpha + F = 0.$$

Un calcul facile donne

$$(2)\quad \begin{cases} \tang^4\alpha[(Ab^2 + F)^2 - D^2b^2] - 2ab\,DE\tang^3\alpha \\ + \tang^2\alpha[2(Ab^2 + F)(Ca^2 + F) - b^2D^2 - a^2E^2] \\ - 2DE\,ab\tang\alpha + (Ca^2 + F)^2 - E^2a^2 = 0. \end{cases}$$

Comparant avec le lemme II, nous avons

$$A_1 - A_3 = 0;$$

donc la somme des arcs-racines est un multiple de π. On peut faire de ce résultat le sujet d'un théorème qui devient celui que M. Joachimsthal a énoncé sans démonstration, en supposant que la seconde conique est un cercle, et alors la première conique est une ellipse rapportée à ses axes principaux.

V. Si dans l'équation (2) nous avons

$$A_0 - A_2 + A_4 = 0 \qquad \text{(lemme II)},$$

ou bien, toute réduction faite,

$$A b^2 - C a^2 = 0;$$

alors la somme des arcs-racines aux points d'intersection est un multiple de $\frac{\pi}{2}$.

VI. Lorsque la première conique est une hyperbole, son équation étant de la forme

$$a^2 y^2 - b^2 x^2 + a^2 b^2 = 0,$$

on fera

$$x = a \,\text{séc}\, \alpha, \quad \text{et} \quad y = b \,\text{tang}\, \alpha.$$

On trouve que lorsqu'on a la relation

$$A b^2 + C a^2 + F = 0,$$

la somme des arcs-racines aux points d'intersection est un multiple de π, et un multiple de $\frac{\pi}{2}$ pour la relation

$$A b^2 + C a^2 - F - D b = 0.$$