Nouvelles annales de mathématiques

Strebor

Sur les cono-sphériques

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 9 (1850), p. 141-143

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1850_1_9__141_1>

SUR LES CONO-SPHÉRIQUES.

L'enseignement, en France, roule, depuis le 1[er] janvier jusqu'au 31 décembre, sur les coniques planes, qui ne sont toutefois que des cas particuliers des cono-sphériques; car le plan est un cas particulier de la sphère. Que, dans les colléges, on ne parle pas de ces courbes, c'est un mal; mais qu'on ne s'en occupe même pas dans les écoles destinées aux hautes théories, à l'École Normale, à l'École Polytechnique, voilà qui est tout à fait intolérable. Dans les Universités d'Allemagne et d'Angleterre, ces courbes font partie des questions ordinaires d'examen, et avec raison. Sans parler des découvertes géométriques de M. Chasles, des applications analytiques de M. Serret, des beaux travaux de MM. Vannson et Borgnet (tome VII, pages 14, 51, 147, 174), les cono-sphériques se présentent en beaucoup de circonstances. Ainsi, rigoureusement parlant, les perspectives des trajectoires célestes, sur la voûte céleste, sont des cono-sphériques. Cependant les professeurs qui ne lisent pas les *Nouvelles Annales* ne connaissent pas ces *lignes,* même de *nom.* Nous croyons donc utile de consacrer dorénavant un article spécial aux questions de ce genre que nous devons à la générosité d'un célèbre professeur étranger.

Rappelons d'anciennes questions non résolues (tome VI, n° 153, page 242; tome VII, n° 190, page 240; n° 205, page 107).

1. Le cône ayant pour sommet le centre de l'une ou de l'autre des courbes nommées sphéro-lemniscates (tome VII, pages 136, 452) et pour base la courbe elle-même, est du second degré.

2. Discuter la courbe enveloppe des bases des triangles sphériques qui ont un angle commun et dont le produit des sinus des demi-angles à la base est constant; et trouver l'expression de son aire.

3. Étant donnée la base d'un triangle, formé sur la surface d'une sphère par trois arcs d'hyperboles équilatères sphériques (de première espèce) concentriques, déterminer le lieu du sommet lorsque la somme des angles du triangle est constante.

4. Étant donnée l'équation d'une courbe plane entre les coordonnées polaires, de la forme suivante :

$$(1) \qquad r^4 - 2r^2 f(\omega) + k^4 = 0,$$

prouver que si l'on désigne par s, s' les deux arcs qui répondent à la même valeur de l'angle polaire ω, on aura

$$s+s'=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\sqrt{\frac{4[f(\omega)]^2+[f'(\omega)]^2-4k^4}{f(\omega)-k^2}}\,d\omega,$$

$$s-s'=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\sqrt{\frac{4[f(\omega)]^2+[f'(\omega)]^2-4k^4}{f(\omega)+k^2}}\,d\omega,$$

où $f'(\omega)$ est la fonction dérivée de $f(\omega)$.

5. Semblablement, si l'on a l'équation d'une courbe sphérique entre les coordonnées polaires sphériques, savoir,

$$(2)\qquad \sin^2\rho\, f(\omega)+\sin 2\alpha\cos\rho=1,$$

où α est une constante, on aura, en désignant par s, s' les deux arcs qui répondent à la même valeur de l'angle ω,

$$s+s'=\cos\alpha\int\sqrt{\frac{4[f(\omega)]^2+[f'(\omega)]^2-4f(\omega)+\sin^2 2\alpha}{f(\omega)-\cos^2\alpha}}\,\frac{d\omega}{f(\omega)},$$

$$s-s'=\sin\alpha\int\sqrt{\frac{4[f(\omega)]^2+[f'(\omega)]^2-4f(\omega)+\sin^2 2\alpha}{f(\omega)-\sin^2\alpha}}\,\frac{d\omega}{f(\omega)}.$$

Remarque. L'équation (2) peut être mise sous une forme entièrement analogue à celle de l'équation (1), si l'on prend tang $\frac{1}{2}\rho$ pour la quantité analogue à un rayon vecteur. (STREBOR.)