NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. CLERE

Solution de la question 206

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 9 (1850), p. 116-118
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1850_1_9__116_0>

SOLUTION DE LA QUESTION 206

(voir t. VIII, p. 107) ;

PAR M. E. CLERE,
Ingénieur des Ponts et Chaussées.

Trouver des nombres rationnels qui satisfassent aux équations

$$x^2 + y^2 - 1 = z^2,$$
$$x^2 - y^2 - 1 = u^2.$$

Retranchons la seconde équation de la première, il viendra

$$2y^2 = z^2 - u^2.$$

Supposons y décomposé en deux facteurs p, q,

$$y = pq;$$

alors

$$(z+u)(z-u) = 2p^2q^2.$$

Posons

$$z + u = 2q^2, \quad z - u = p^2;$$

on en tire

$$z = \frac{2q^2 + p^2}{2},$$
$$u = \frac{2q^2 - p^2}{2}.$$

Actuellement, la condition que x doit aussi être rationnel va nous permettre de faire disparaître l'une des indéterminées p, q, de sorte que nous aurons x, y, z, u exprimés en fonction d'une seule indéterminée.

Pour cela, substituons les valeurs de y et de z dans la première équation

$$x^2 + p^2 q^2 - 1 = \left(\frac{2q^2 + p^2}{2}\right)^2 = \frac{4q^4 + 4p^2q^2 + p^4}{4},$$

$$x^2 = \frac{4 + 4q^4 + p^4}{4}.$$

Pour que x soit rationnel, il faut que

$$4 + 4q^4 + p^4$$

soit un carré parfait, ou que

$$4q^4 = 4p^2,$$

$$p = q^2;$$

alors

$$x^2 = \frac{q^8 + 4q^4 + 4}{4} = \left(\frac{q^4 + 2}{2}\right)^2.$$

On a alors, pour valeur des quatre inconnues,

$$x = 1 + \frac{q^4}{2},$$

$$y = q^3,$$

$$z = q^2 + \frac{q^4}{2},$$

$$u = q^2 - \frac{q^4}{2}.$$

En donnant à q une valeur rationnelle quelconque, on aura des valeurs rationnelles de x, y, z, u. Et si l'on veut avoir des valeurs entières pour ces inconnues, il suffira de prendre pour q un nombre pair.

Il est d'ailleurs évident que l'on pourra prendre le signe que l'on voudra pour x, y, z, u.

Note. Le Lilavati dont cette question est tirée, donne les solutions suivantes :

$$x = 1 + \left(\frac{8q^2 - 1}{8q^2}\right)^2, \qquad y = \frac{8q^2 - 1}{2q}$$

pour des nombres rationnels, et

$$x = 8q^4 + 1, \qquad y = 8q^3$$

pour des nombres entiers. Cette dernière partie de la solution s'accorde seule avec la précédente, par la raison qu'en faisant $y = pq$, on suppose tacitement qu'il s'agit de nombres entiers; tandis qu'il faut rendre $2y^2 + u^2$ un carré parfait par les méthodes connues, sans la décomposition en facteurs; faire, par exemple,

$$2y^2 + u^2 = (u + ty)^2, \text{ etc}$$