MOURGUES

Limite supérieure des racines positives

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 9 (1850), p. 108-115
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1850_1_9__108_1>

LIMITE SUPÉRIEURE DES RACINES POSITIVES

(voir t. I, p. 243);

PAR M. MOURGUES,
Professeur au lycée de Marseille.

1. La solution la plus expéditive et la plus immédiate est donnée par la formule $1+\sqrt[m-n]{S}$, S étant le coefficient négatif majeur, et n le degré du premier terme négatif. Mais cette formule a l'inconvénient de donner en général une limite beaucoup trop élevée. Il s'agit de la rendre

(*) La démonstration des célèbres formules Pascales de Gauss n'est pas encore connue en France.

plus avantageuse par une modification qui consiste à remplacer S par un nombre bien plus petit, à la formation duquel concourent tous ou presque tous les coefficients de l'équation.

2. *Lemme.* Pour toute valeur de x supérieure au nombre positif a, on a la relation

$$\frac{Nx^n + Px^p + \ldots + Rx^r + Tx^t}{x^n + x^p + \ldots + x^r + x^t} \overset{<}{=} \frac{Na^n + Pa^p + \ldots + Ra^r + Ta^t}{a^n + a^p + \ldots + a^r + a^t},$$

n, p, ... r, t étant des nombres entiers positifs décroissants, et N, P, ..., R, T, des nombres positifs tels, que chacun d'eux soit au moins égal à celui qui le précède.

Démonstration. On a d'abord

$$\frac{Nx^n + Px^p}{x^n + x^p} = \frac{N(x^n + x^p) + (P - N)x^p}{x^n + x^p} = N + \frac{P - N}{x^{n-p} + 1}.$$

Or, pour x positif et croissant, cette dernière quantité est constante ou décroissante, puisque $P \overset{=}{>} N$; donc, pour $x > a$,

$$\frac{Nx^n + Px^p}{x^n + x^p} \overset{<}{=} \frac{Na^n + Pa^p}{a^n + a^p}.$$

Si maintenant nous supposons démontrée la relation

$$\frac{Nx^n + px^p + \ldots + Rx^r}{x^n + x^p + \ldots + x^r} \overset{<}{=} \frac{Na^n + Pa^p + \ldots + Ra^r}{a^n + a^p + \ldots + a^r} (= A),$$

ou

$$Nx^n + Px^p + \ldots + Rx^r \overset{<}{=} A(x^n + x^p + \ldots + x^r),$$

nous aurons

$$\begin{aligned}\frac{Nx^n + Px^p + \ldots + Rx^r + Tx^t}{x^n + x^p + \ldots + x^r + x^t} &\overset{<}{=} \frac{A(x^n + x^p + \ldots + x^r) + Tx^t}{x^n + x^p + \ldots + x^r + x^t}, \\ &\overset{<}{=} \frac{A(x^n + x^p + \ldots + x^r + x^t) + (T - A)x^t}{x^n + x^p + \ldots + x^r + x^t}, \\ &\overset{<}{=} A + \frac{T - A}{x^{n-t} + x^{p-t} + \ldots + x^{r-t} + 1}.\end{aligned}$$

Or A est au plus égal à R et, par suite, au plus égal à T, puisque sa valeur est l'égale ou une moyenne des fractions égales ou croissantes $\frac{\mathrm{N}a^n}{a^n}, \frac{\mathrm{P}a^p}{a^p}, \ldots, \frac{\mathrm{R}a^r}{a^r}$; donc, pour x croissant à partir de a, la dernière quantité sera constante ou décroissante. Par suite,

$$\frac{\mathrm{N}x^n + \mathrm{P}x^p + \ldots + \mathrm{R}x^r + \mathrm{T}x^t}{x^n + x^p + \ldots + x^r + x^t} \overset{<}{=} \frac{\mathrm{N}a^n + \mathrm{P}a^p + \ldots + \mathrm{R}a^r + \mathrm{T}a^t}{a^n + a^p + \ldots + a^r + a^t},$$

comme on voulait le démontrer.

Si l'on pose

$$\mathrm{K} = \frac{\mathrm{N}a^n + \mathrm{P}a^p + \ldots + \mathrm{R}a^r + \mathrm{T}a^t}{a^n + a^p + \ldots + a^r + a^t} = \frac{\mathrm{N}a^{n-t} + \mathrm{P}a^{p-t} + \ldots + \mathrm{R}a^{r-t} + \mathrm{T}}{a^{n-t} + a^{p-t} + \ldots + a^{r-t} + 1},$$

la relation pourra s'écrire

$$\mathrm{N}x^n + \mathrm{P}x^p + \ldots + \mathrm{R}x^r + \mathrm{T}x^t \overset{<}{=} \mathrm{K}(x^n + x^p + \ldots + x^r + x^t).$$

3. Soit une équation où les signes des termes négatifs sont mis en évidence :

$$x^m + \mathrm{C}x^c + \mathrm{H}x^h - \mathrm{N}x^n \ldots - \mathrm{N}_p x^p \ldots - \mathrm{N}_r x^r \ldots - \mathrm{N}_t x^t \ldots = 0.$$

Si les nombres $\mathrm{N}, \mathrm{N}_p, \ldots, \mathrm{N}_r, \mathrm{N}_t$ ne sont pas tels, que chacun d'eux soit au moins égal à celui qui le précède, en les remplaçant par des nombres $\mathrm{N}, \mathrm{P}, \ldots, \mathrm{R}, \mathrm{T}$, remplissant cette condition, on augmentera la somme absolue des termes négatifs pour une valeur quelconque positive de x. Donc on aura une limite supérieure des racines positives de la proposée dans toute valeur de x, à partir de laquelle sera satisfaite la relation

$$x^m + \mathrm{C}x^c + \mathrm{H}x^h > \mathrm{N}x^n + \mathrm{P}x^p + \ldots + \mathrm{R}x^r + \mathrm{T}x^t.$$

Or cette relation sera satisfaite par toute valeur positive de x, supérieure à $\overset{=}{>}$ 2, qui satisfera aux suivantes :

$$x^m + Cx^c + Hx^h > K(x^n + x^p \dots + x^r + x^t),$$

$$> K(x^n + x^{n-1} \dots + x + 1),$$

$$> K\frac{x^{n+1} - 1}{x - 1},$$

$$> K\frac{x^{n+1}}{x - 1},$$

$$x^{m-n-1} + Cx^{c-n-1} + H^{h-n-1} > \frac{K}{x-1},$$

$$(x^m - 1)^{m-n-1} + Ca^{c-n-1} + Ha^{h-n-1} > \frac{K}{x-1},$$

$$(x-1)^{m-n} + Ca^{c-n-1} + Ha^{h-n-1} > K,$$

$$x > 1 + \sqrt[m-n]{K - Ca^{c-n-1} - Ha^{h-n-1}}.$$

Une limite supérieure des racines positives est donc le nombre qu'on obtient en donnant à a une valeur quelconque, non inférieure à 2, dans la formule

$$L = 1 + \sqrt[m-n]{\frac{Na^{n-t} + Pa^{p-t} \dots + Ra^{r-s} + T}{a^{n-t} + a^{p-t} \dots + a^{r-1} + 1} - Ca^{c-n-1} - Ha^{h-n-1}};$$

N étant le premier coefficient négatif, et P, Q,..., R, T, les autres coefficients de même espèce, ou ces coefficients modifiés de telle sorte que $P \overline{\overline{>}} N$, $Q \overline{\overline{>}} P$, etc.

4. Dans les applications de cette formule, on commencera par faire a égal à 2 ou à 3. Si une pareille substitution donnait pour L une valeur assez élevée, on remplacerait a par l'un des nombres 4, 5,..., 8, 9, 10, qui se prêtent à un calcul rapide. La limite serait ainsi abaissée, car, en vertu du lemme lui-même, K diminue quand a augmente. Il reste constant dans le seul cas ou N est le coefficient négatif moyen, car alors $N = P \dots = R = T$, et, par suite, $K = N$.

Exemples : 1°.

$$x^5 + 10x^4 - 12x^3 - 48x^2 - 50x - 24 = 0,$$

$$L = 1 + \sqrt[2]{\frac{12a^3 + 48a^2 + 50a + 50}{a^3 + a^2 + a + 1} - 10}.$$

Pour $a = 2$,

$$L = 1 + \sqrt{\frac{438}{15} - 10} = 6.$$

Pour $a = 3$,

$$L = 1 + \sqrt{\frac{956}{40} - 10} = 5.$$

2°.

$$x^7 + 6x^6 - 5x^5 - 23x^4 + 15x^3 + 36x^2 - 115x + 48 = 0,$$

$$L = 1 + \sqrt{\frac{5a^4 + 23a^3 + 115}{a^4 + a^3 + 1} - 6}.$$

Pour $a = 2$,

$$L = 1 + \sqrt{\frac{379}{25} - 6} = 5.$$

Pour $a = 3$,

$$L = 1 + \sqrt{\frac{1141}{109} - 6} = 4.$$

5. Jusqu'à présent, nous n'avons pas tenu compte des termes positifs compris entre les termes négatifs extrêmes ; mais on peut les mettre à profit pour diminuer les coefficients des termes négatifs qui les suivent : de cette manière, tous ou presque tous les coefficients concourent à la formation de la limite. C'est ce qu'indiquent les exemples suivants :

1°.

$$x^9 - 5x^8 - 13a^7 - 12x^6 - 5x^5 - 20x^4 - 27x^3 - 15x^2 + 1 = 0.$$

En scindant $5x^5$ en deux parties, $2x^5+3x^5$, l'équation peut s'écrire

$$x^9-5x^8-13x^7-12x^6-(20-2x)x^4-(27-3x^2)x^3-15x^2+1=0.$$

Pour toute valeur de x supérieure au nombre positif α, la somme des termes négatifs sera inférieure à

$$5x^8+13x^7+12x^6+(20-2\alpha)x^4+(27-3\alpha^2)x^3+15x^2.$$

En donnant à α une valeur particulière, 2 ou 3, certains coefficients négatifs dans la proposée se trouveront diminués, et, par suite, la valeur de L, où il faudra donner à a une valeur non inférieure à 2 et à α. En faisant $\alpha=2$, et $a=2$, on trouve $L=10$.

2°.

$$x^8-x^7-2x^6+4x^5-3x^4+2x^3-8x^2+5x-40=0;$$

elle peut s'écrire

$$x^8-x^7-2x^6+4x^5-3x^4-(8-2x)x^2-(40-5x)=0.$$

Pour x supérieure à $\alpha \overline{\gtrless} 1$, x^5 détruit $-3x^4$,

$$8-2x<8-2\alpha, \quad \text{et} \quad 40-5x<40-5\alpha;$$

la somme des termes négatifs est donc inférieure à

$$x^7+2x^6+(8-2\alpha)x^2+40-5\alpha.$$

En faisant $\alpha=2$, puis $a=2$ dans L, on aura $L=3$.

6. *Scolie*. Il pourrait se faire que, pour une valeur de $a \overline{\gtrless} 2$, la quantité $K-Ca^{c-n-1}-Ha^{h-n-1}$ fût, dans certains cas, inférieure à -1 et même inférieure à zéro. Alors, la dernière inégalité

$$(x-1)^{m-n}>K-Ca^{c-n-1}-Ha^{h-n-1}$$

serait bien vérifiée pour toute valeur de x supérieure à a; mais cette inégalité n'impliquant la première qu'à condition de considérer des valeurs de x supérieures à a, c'est le nombre a lui-même qu'il faudrait prendre pour limite dans ces circonstances.

7. Nous terminerons ces considérations sur une limite supérieure des racines positives, en posant une règle qui permet, dans plusieurs cas, de reconnaître, pour ainsi dire, à vue, que la limite supérieure des racines positives est l'un des petits nombres 2, 3, 4, dont on peut, en général, se contenter.

Soit une équation, où les signes sont mis en évidence,

$$x^m + Cx^c + Hx^h - Nx^n \ldots - Sx^s \ldots = 0,$$

S désignant le coefficient négatif majeur.

Une valeur de $x \overline{\gt} 2$ sera une limite supérieure si, pour toute valeur supérieure, on a

$$\begin{aligned} x^m + Cx^c + Hx^h &> S(x^n + x^{n-1} \ldots + x + 1), \\ &> S\frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}, \\ &> S x^{n+1}; \end{aligned}$$

donc $a \overline{\gt} \alpha$ sera une limite si, pour des valeurs supérieures de x, on a

$$a^{m-n-1} x^{n+1} + Ca^{c-n-1} x^{n+1} + Ha^{h-n-1} x^{n+1} > S\alpha^{n+1},$$
$$a^{m-n-1} + Ca^{c-n-1} + H\alpha^{h-n-1} > S.$$

De là cet énoncé :

Le nombre a, non inférieur à 2, est une limite supérieure lorsque le coefficient négatif majeur ne dépasse pas la somme des premiers termes positifs, après remplacement de x par a et soustraction faite aux exposants de l'exposant plus un du premier terme négatif.

Exemple :

$$x^5 + 50x^4 - 42x^3 - 49x^2 - 52x - 39 = 0.$$

La règle donne

$$a + 50 > 52;$$

donc 2 est une limite supérieure.

Ici, comme précédemment, on pourra profiter des termes positifs compris entre les termes négatifs extrêmes pour la correction de termes négatifs suivants.

Exemple :

$$x^9 + 18x^8 - 13x^7 - 16x^6 + x^5 - 20x^4 - 27x^3 - 15x^2 + 8x - 41 = 0.$$

On peut mettre cette équation sous la forme

$$x^9 + 18x^8 - 13x^7 - 16x^6 - 20x^4 - (27 - x^2)x^3 - 15x^2 - (41 - 8x) = 0.$$

Or, pour toute valeur de x supérieure au nombre positif α, la somme des termes négatifs est inférieure à

$$13x^7 + 16x^6 + 20x^4 + (27 - \alpha^2)x^3 + 15x^2 + (41 - 8\alpha).$$

Pour $\alpha = 3$, le coefficient majeur est 20.

La règle donne alors

$$a + 18 > 20.$$

Mais les valeurs de x considérées étant supérieures, d'une part, à $\alpha = 3$, et, d'autre part, devant être supérieures à a, on ne peut pas donner à a une valeur inférieure à 3. Ce nombre 3 vérifiant l'inégalité, il est une limite supérieure des racines positives.