NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

TERQUEM

Question d'examen sur le trapèze et le quadrilatère inscrits

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 8 (1849), p. 98-99

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__98_0>

QUESTION D'EXAMEN SUR LE TRAPÈZE ET LE QUADRILATÈRE INSCRITS.

I. Problème. *Inscrire dans le cercle donné un trapèze dont l'aire et les côtés non parallèles, nécessairement égaux, sont donnés.*

Solution. Soit ABCD le trapèze inscrit; faisons

$$AD = BC = a,\quad AB = x,\quad CD = y,$$
$$AC = BD = z,\quad S = \text{aire},\quad D = \text{diamètre}.$$

La distance des deux bases AB, CD est égale à

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{4a^2 - (y-x)^2};$$

donc

$$S = \tfrac{1}{4}(x+y)\sqrt{4a^2 - (y+x)^2 + 4xy}.$$

Or dans le trapèze inscrit, l'on a

$$a^2 + xy = z^2;$$

donc

$$(1)\qquad S = \tfrac{1}{4}(x+y)\sqrt{4z^2 - (x+y)^2}.$$

Soient s et s' les aires des triangles ABC, ACD; on a

$$axz = Ds,\quad ayz = Ds';\quad \text{d'où}\quad az(x+y) = DS.$$

Remplaçant dans l'équation (1) $x+y$ par sa valeur, et faisant disparaître le radical, on déduit

$$(2)\qquad 4a^2(D^2 - a^2)z^4 = D^2S^2;$$

on peut donc construire *géométriquement* z, et par conséquent le trapèze.

Au moyen de l'équation (2), connaissant trois des quatre quantités a, z, S, D, on peut construire la quatrième. S croissant proportionnellement au carré de z, il s'ensuit que S est un maximum lorsque z est un diamètre, et alors le trapèze devient un rectangle inscrit.

On trouve aussi

$$a^2(x+y)^4 = 4S^2(D^2 - a^2),$$

ce qui donne la valeur de $x+y$, facile à construire de plusieurs manières. Soit A′ le point diamétralement opposé à A; on aura

$$DA' = \sqrt{D^2 - z^2} = b;$$

et faisant $S = 2al$, on obtient

$$bz^2 = D^2 l, \quad (x+y)^2 = 4bl.$$

Observation. Pour le cas général du quadrilatère, *voir* tome VII, page 69.

II. Soient a, b, c, d les quatre côtés consécutifs d'un quadrilatère inscrit, m la diagonale qui va de l'angle ab à l'angle cd, et n la seconde diagonale : on aura

$$ac + bd = \frac{m^2(ab+cd)}{ad+bc} = \frac{n^2(ad+bc)}{ab+cd};$$

$$\cos(a, d) = \frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)}; \quad \cos(a, b) = \frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2ab+cd};$$

$$\sin(a, d) = \frac{2S}{ad+bc}; \quad \sin(a, b) = \frac{2S}{ab+cd};$$

$S =$ aire (*v.* t. VII, p. 70); $\quad D^2 = \dfrac{(ac+bd)(ab+cd)(ad+bc)}{4S^2};$

$D =$ diamètre du cercle circonscrit; $\quad \sin(a, m) = \dfrac{d}{D};$

$$\sin(b, m) = \frac{c}{D}; \quad \sin(a, n) = \frac{b}{D}; \quad \sin(b, n) = \frac{a}{D};$$

$$\sin(m, n) = \frac{2S}{ac+bd}; \quad S^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d);$$

$$2s = a + b + c + d.$$