Nouvelles annales de mathématiques

Équation de la courbe que décrit un chien à la poursuite de son maître qu'il voit constamment parcourir une droite : le rapport *m* des vitesses est constant

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 8 (1849), p. 91-96

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__91_0>

ÉQUATION

De la courbe que décrit un chien à la poursuite de son maître qu'il voit constamment parcourir une droite : le rapport m des vitesses est constant ;

PAR UN ÉLÈVE DE L'INSTITUTION BARBET.

La tangente à la courbe $y = \varphi(x)$ au point occupé par le chien passe par le point où se trouve l'homme au même moment. Si A′ et A sont deux positions du chien, B′ et B sont les deux positions correspondantes du maître.

De plus

$$\mathrm{BB}' = m \,\text{arc}\, \mathrm{AA}' \quad (\textit{fig.}\ 8,\ \textit{Pl. I}),$$
$$\mathrm{OB} = y - x\varphi'(x).$$

Posons

$$z = x\varphi'(x),$$

et soient l et k les accroissements de z et de y correspondants à un accroissement h de x, nous aurons

$$\mathrm{OB}' = y + k - (z + l), \quad \mathrm{BB}' = k - l, \quad \text{corde AA}' = \sqrt{k^2 + h^2},$$

$$\frac{1}{m} = \frac{\text{arc AA}'}{\text{cord. AA}'} \times \frac{\text{cord. AA}'}{\mathrm{BB}'},$$

ou

$$\frac{1}{m} = \frac{\text{arc AA}'}{\text{cord. AA}'} \, \frac{\sqrt{\dfrac{k^2}{h^2} + 1}}{\dfrac{k}{h} - \dfrac{l}{h}}.$$

Puis, en passant à la limite

$$\frac{\text{arc AA}'}{\text{cord. AA}'} = 1, \quad \sqrt{\left(\frac{k}{h}\right)^2 + 1} = \sqrt{\varphi'(x)^2 + 1},$$

$$\frac{l}{h} = \varphi'(x) + x\varphi''(x), \quad \frac{1}{m} = \sqrt{\frac{\varphi'(x)^2 + 1}{x\varphi''(x)}};$$

d'où

$$x^2\varphi''(x)^2 = [\varphi'(x)^2 + 1]\, m^2.$$

Cherchons à déterminer $\varphi'(x)$ que nous supposerons algébrique. Prenons les dérivées des deux membres de l'équation (1),

$$m^2\varphi'(x)\,\varphi''(x) = x^2\varphi''(x)\,\varphi'''(x) + x\varphi''(x)^2,$$

ou

$$(2) \qquad m^2\varphi'(x) = x^2\varphi'''(x) + x\varphi''(x).$$

Soit Ax^n un terme de $\varphi'(x)$. Les termes correspondants de $\varphi''(x)$ et $\varphi'''(x)$ seront nAx^{n-1} et $n(n-1)Ax^{n-2}$; l'identité (2) exige donc que l'on ait

$$nA + n(n-1)A = m^2A, \quad \text{ou} \quad n = \pm m.$$

$\varphi'(x)$ sera donc de la forme $Ax^m + Bx^{-m}$.

De plus, par l'équation (1) on a

$$m^2[1 + (Ax^m + Bx^{-m})^2] = x^2(mAx^{m-1} - mBx^{-m-1})^2,$$

d'où

$$1 + 4AB = 0.$$

Alors

$$(3) \qquad \varphi'(x) = Ax^m - \frac{1}{4A}x^{-m};$$

d'où il suit :

$$\text{Si } m \gtrless 1,$$

$$\varphi(x) = \frac{A}{m+1}x^{m+1} - \frac{1}{4A(m-1)}x^{1-m} + c;$$

$$\text{Si } m = 1,$$

$$\varphi(x) = \frac{A}{2}x^2 - \frac{1}{4A}lx + c.$$

Restent deux constantes arbitraires que l'on détermine par les positions initiales du maître et du chien.

Discussion.

1°. $m > 1$.

$m = \frac{p}{2n}$, fraction irréductible. La courbe est symétrique par rapport à $y = c$, et n'a aucun point à gauche de Oy; chacune des deux branches se compose d'une branche asymptotique à Oy, et d'une autre branche parabolique.

$m = \frac{p}{2n+1}$, fraction irréductible. La courbe aura deux branches symétriques par rapport à l'axe des y; si p est impair, chacune de ces branches se compose de deux autres, l'une asymptotique à Oy, l'autre parabolique.

Si p est pair, il y aura une seule branche de même nature que les précédentes.

2°. $m = 1$.

Une seule branche analogue aux précédentes.

3°. $m < 1$.

$m = \frac{p}{2n}$. La courbe est symétrique par rapport à $y = c$; elle touche Oy au point $x = 0$, $y = c$; tous ses points sont placés à droite de Oy.

Si $m = \frac{p}{2n+1}$, la courbe touche encore l'axe des y au point $x = 0$, $y = c$; mais ce point de contact est en même temps un point d'inflexion comme le montre la forme de la dérivée seconde qui change alors de signe.

Dans le cas de $m < 1$, la courbe n'a pas d'asymptote rectiligne et n'offre qu'une seule branche distincte composée de deux branches infinies.

Note sur la courbe de poursuite.

On lit dans la *Correspondance sur l'École Polytechnique,* tome II, page 275, 1814 :

« Un ancien élève, directeur des douanes à Fuligno,
» département de Trasimène (M. Dubois-Aymé), se pro-
» menait sur le bord de la mer : il aperçut à quelque dis-
» tance une personne de sa connaissance, et se mit à
» courir pour l'atteindre. Son chien, qui s'était écarté,
» courut vers lui en décrivant une courbe dont l'em-
» preinte resta sur le sable. M. Dubois, revenant sur ses
» pas, fut frappé de la régularité de cette courbe, et il
» en chercha l'équation en supposant, 1° que le chien se
» dirigeait toujours vers le lieu que le maître venait de
» quitter; 2° que le maître parcourait une ligne droite;
» 3° que les vitesses du maître et du chien étaient uni-
» formes. »

On donne ensuite une équation de cette courbe dont l'inexactitude a été établie par M. Thomas de Saint-Laurent, alors lieutenant au 7e régiment d'artillerie à pied (*Gergonne,* tome XIII, page 145, 1822). M. Saint-Laurent parvient d'abord à la même équation (1); mais, au lieu de supposer que $\varphi'(x)$ est algébrique, espèce de divination, il *intègre* l'équation (1) et parvient directement à l'équation (3); ensuite on prend pour axe des x, la tangente perpendiculaire à l'axe des y, et l'on désigne par a la distance du point de contact à l'origine; de sorte que l'on a

$$\mathrm{A}\, a^m - \frac{1}{4\mathrm{A}} a^{-m} = 0,$$

d'où

$$\mathrm{A} = \tfrac{1}{2} a^{-m} \quad \text{et} \quad \varphi'(x) = \tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^m - \left(\frac{a}{x}\right)^m\right],$$

et enfin

$$\frac{2y}{a} = \frac{1}{m+1}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{m+1} - 1\right] + \frac{1}{m-1}\left[\left(\frac{a}{x}\right)^{m-1} - 1\right]:$$

car pour $x = a$, on doit avoir $y = 0$.

La courbe est rectifiable, ce qui est évident à priori; l'intégration donne, pour la longueur de l'arc s compté depuis le point de contact avec l'axe des x,

$$\frac{2s}{a} = \frac{1}{n+1}\left[\left(\frac{a}{x}\right)^{n-1} - 1\right] - \frac{1}{n+1}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{n+1} - 1\right].$$

Quand x diminue, s croît positivement, comme le remarque M. Querret (même volume, page 390).

Si l'on transporte l'origine au point de l'axe des y, où l'on a $y = -\frac{ma}{m^2-1}$, l'équation de la courbe prend cette forme

$$y = \frac{a}{2}\left[\frac{a}{m+1}\left(\frac{x}{a}\right)^{m+1} + \frac{a}{m-1}\left(\frac{a}{x}\right)^{m-1}\right].$$

On peut donc construire la courbe à l'aide de deux autres courbes, l'une parabolique et l'autre hyperbolique; pour $m = 1$, y devient constamment infini, ce qui annonce un changement dans la forme de la fonction $\varphi(x)$, qui cesse d'être algébrique et devient logarithmique. Dans le même volume on trouve la solution du problème plus général, où le chien, traversant une rivière pour rejoindre son maître, est à chaque instant détourné par le courant constant de l'eau. On doit une première solution à MM. de Saint-Laurent et Sturm (page 289); mais la plus belle, d'une admirable simplicité et fondée sur la considération des mouvements relatifs, a été donnée par M. Querret (p. 391).

La courbe considérée dans le premier problème est aussi celle que décrirait un vaisseau qui en poursuivrait un autre, en se dirigeant constamment sur lui. C'est là le problème que Bouguer a résolu; en parvenant à la même équation donnée ci-dessus, il nomme la courbe *ligne de poursuite* (*Mémoires de l'Académie*, 1732, page 1), et Maupertuis en a donné une solution plus courte. Tm.