A. MANNHEIM

Solution géométrique de la question 151

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 8 (1849), p. 89-90
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__89_1>

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE DE LA QUESTION 151

(t VI, p 388),

PAR M. A. MANNHEIM,

Élève du lycée Charlemagne, classe de M. Catalan (*)

D'un point A (*fig.* 6, *Pl. I*), extérieur à une courbe du second degré, on mène deux tangentes AB et AC; d'un point G de la courbe on mène une tangente DE et un diamètre GO; on joint le point A au point de rencontre de ce diamètre avec la corde de contact BC: cette droite partagera en deux parties égales la portion de tangente DE comprise entre les deux tangentes AB et AC.

(*) Maintenant élève de l'École Polytechnique.

Menons du point A la droite AL parallèle à la tangente DE. Le pôle de cette droite est le point de rencontre F du diamètre GO et de la corde BC. La corde BC, qui passe au point F, est divisée harmoniquement par ce point et par la droite AL. Les droites AL, AB, AF, AC forment un faisceau harmonique, et la droite DE, parallèle au rayon vecteur AL, est partagée en deux parties égales par les trois autres AB, AC, AF; ainsi DH = HE.

La démonstration est exactement la même pour l'hyperbole et pour la parabole. Dans le cas de l'hyperbole, si le point A est au centre de la courbe, les tangentes AB, AC sont les asymptotes, et l'on retombe sur un théorème connu.

Dans le cas de la parabole, on a AH = HF (*fig.* 7, *Pl. I*), car le point F étant le pôle AL, on a GF = GM.

La figure AEFD est donc un parallélogramme; on voit donc que si, par le point A, on mène deux tangentes AB et AC à une parabole, si, d'un point F de la corde de contact de ces tangentes, on mène des parallèles FD et FE aux tangentes AB et AC, la droite DE, qui joint les points de rencontre de ces parallèles avec les tangentes est elle-même tangente à la parabole.

Les triangles DBF et EFC sont équiangles, et, par conséquent, semblables, et l'on a

$$\frac{DF}{EC} = \frac{DB}{EF} \quad \text{ou} \quad \frac{AE}{EC} = \frac{DB}{AD}.$$

d'où l'on voit que la tangente DE divise en parties inversement proportionnelles les tangentes AC et AB.