TERQUEM

Formules générales de Waring pour trouver la valeur des fonctions symétriques entières et rationnelles des racines d'une équation algébrique

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 8 (1849), p. 76-79

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__76_0>

FORMULES GÉNÉRALES DE WARING

Pour trouver la valeur des fonctions symétriques entières et rationnelles des racines d'une équation algébrique (*).

Sommes des puissances entières positives des racines.

1. Soit donnée l'équation

$$x^m - A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + (-1)^m A_m = 0,$$
$$(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m),$$

n étant un nombre entier positif; on a, d'après un symbole connu,

$$S_n = x_1^n + x_2^n + \ldots + x_m^n.$$

Il s'agit de trouver S_n en fonction des coefficients de l'équation.

Ordonnons cette fonction par rapport aux puissances décroissantes de A_1; il vient

$$S_n = A_1^n + T_1 A_1^{n-1} + T_2 A_1^{n-2} + \ldots + T_p A_1^{n-p} + \ldots + T_n$$

Loi de formation.

Le terme général T_p est un polynôme; le terme général de ce polynôme est représenté par

$$R . A_r^\rho A_s^\sigma A_t^\tau \ldots,$$

où $r, s, t, \ldots$, indices inférieurs, sont des nombres entiers plus grands que 1; et $\rho, \sigma, \tau, \ldots$ des exposants positifs entiers, zéro compris. Pour trouver ces nombres, on résout l'équation indéterminée

$$r\rho + s\sigma + t\tau + \ldots = p,$$

et ayant soin de ne négliger aucune solution.

(*) *Meditationes algebraicæ*. Edit. tertia, 1782, p. 1 et 8.

R est un coefficient numérique: les indices et les exposants étant connus, on fait

$$\rho + \sigma + \tau + \ldots = u;$$

et l'on a, abstraction faite de tout signe,

$$R = \frac{n[n-p+1]}{[\rho][\sigma][\tau]\ldots[n-p+u]};$$

les crochets désignent des produits continuels. Si p et u sont tous deux pairs, ou tous deux impairs, le signe de R est positif; et négatif dans l'autre cas.

D'après cette loi, on trouve

$$T_1 = 0;\ T_2 = -nA_2;\ T_3 = nA_3;\ T_4 = -nA_4 + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-3}{2}A_2^2;$$

$$T_5 = nA_5 - n.\overline{n-4}\,A_2A_3;\ T_6 = -nA_6 + n.\overline{n-5}.A_2A_4 + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-5}{2}A_3^2,$$

$$T_7 = nA_7 - n.\overline{n-6}\,A_2A_5 - n.\overline{n-6}\,A_3A_4 + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-6}{2}\cdot\frac{n-5}{1}A_2^2A_3,$$

$$T_8 = -nA_8 . n.\overline{n-7}\,A_6A_2 + n.\overline{n-7}\,A_5A_3 + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-7}{2}A_4^2$$

$$- n\cdot\frac{n-7}{1}\cdot\frac{n-6}{2}A_2^2A_4 - n.\overline{n-7}\cdot\frac{n-6}{2}A_3^2A_2$$

$$+ n\cdot\frac{n-7}{2}\cdot\frac{n-6}{3}\cdot\frac{n-5}{4}A_2^4.$$

Waring ne dit pas comment il est parvenu à cette formule; mais il démontre que si elle est vraie pour n, elle est vraie aussi pour $n+1$: d'ailleurs, les sommes des racines forment une série récurrente à échelle de relation connue, dont on sait toujours trouver le terme général.

Fonction symétrique entière des racines en fonction des sommes des racines.

2. Même équation que ci-dessus, et représentons la somme à chercher par $\Sigma x_1^a x_2^b \ldots x_n^t$, n des m racines entrant dans chaque terme; a, b, c ..... d sont des expo-

sants entiers positifs et *inégaux*. Voici la notation de Waring :

$$s_a = x_1^a + x_2^a + \ldots + a_n^a,$$

$$s_b = x_1^b + x_2^b + \ldots + x_n^b,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mathrm{A} = s_a \,.\, s_b \,.\, s_c \ldots s_l,$$

$$\mathrm{B} = \mathrm{A}\left[\frac{s_{a+b}}{s_a \,.\, s_b} + \frac{s_{a+c}}{s_a \,.\, s_c} + \cdots + \frac{s_{b+c}}{s_b \,.\, s_c} + \cdots\right],$$

$$\mathrm{C} = \mathrm{A}\left[\frac{s_{a+b+c}}{s_a \,.\, s_b \,.\, s_c} + \frac{s_{a+b+d}}{s_a \,.\, s_b \,.\, s_d} + \cdots\right],$$

$$\mathrm{D} = \mathrm{A}\left[\frac{s_{a+b+c+d}}{s_a\, s_b\, s_c\, s_d} + \cdots\right],$$

$$\mathrm{BB} = \mathrm{A}\left[\frac{s_{a+b} \,.\, s_{c+d}}{s_a\, s_b\, s_c\, s_d} + \cdots\right],$$

$$\mathrm{E} = \mathrm{A}\left[\frac{s_{a+b+c+d+e}}{s_a\, s_b\, s_c\, s_d\, s_e} + \cdots\right],$$

$$\mathrm{BC} = \mathrm{A}\left[\frac{s_{a+b+c} \,.\, s_{d+e}}{s_a\, s_b\, s_c\, s_d\, s_e}\right],$$

$$\mathrm{F} = \mathrm{A}\left[\frac{s_{a+b+c+d+e+f}}{s_a\, s_b\, s_c\, s_d\, s_e\, s_f} + \cdots\right].$$

Dans cette relation, B, C, D, E présentent des sommes à 2, 3, 4, 5 exposants s_{a+b}, s_{a+b+c}, $s_{a+b+c+d}$, $s_{a+b+c+d+e}$, etc. Mais 4 se décompose en $2+2$: c'est à quoi répond BB, où l'on trouve $s_{a+b}\, s_{c+d}$; 5 se décompose en $2+3$, on a ainsi BC ; de même $6=2+4=3+3$; ce qui donne BD, CC et BBB, ou $s_{a+b}\, s_{c+d+e+f}$ et $s_{a+b+c}\, s_{d+e+f}$ et $s_{a+b}\, s_{c+d}\, s_{e+f}$. Cela posé, on a

$$\begin{array}{rl}
\Sigma x_1 x_2^b \ldots x_n^l = & \mathrm{A} - \mathrm{B} + 1.2.\mathrm{C} - 1.2\;3.\mathrm{D} + 1.2\;3.4.\mathrm{E}, \\
& \qquad\qquad 1.1\;\;\mathrm{BB} - 1.2.\qquad \mathrm{BC}, \\
& - 1.2.3.4.5.\mathrm{F} + 1.2.3\;4.5.6.\mathrm{G}, \\
& - 1.2 \qquad\quad \mathrm{BD} - 1.1.2.3.4.\mathrm{BE}, \\
& \;\; 1.2\;\;1.2\;\;\; \mathrm{CC} - 1.2\;\;1.2.3\;\;\mathrm{CD}, \\
& \;\; 1\;\;1.1.\;\;\; \mathrm{BBB} + 1.1\;\;1\;\;1.2.\mathrm{BBC}.
\end{array}$$

Loi de formation.

a. Chaque lettre apporte un coefficient et un signe déterminés, dans cet ordre. Ainsi :

B, -1 ; C, $+1.2$; D, $-1.2.3$; E, $+1.2.3.4$; F, $-1.2.3.4.5$, et ainsi de suite.

b. Les termes de même dimension sont dans la même colonne verticale. Waring démontre encore que si la formule existe pour n racines, elle existe aussi pour $n+1$ racines.

Lorsque des exposants deviennent égaux, il faut diviser les termes A, B, C, D, etc., par les produits continuels convenables.