NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

TERQUEM

Sur les polygones et les polyèdres étoilés, polygones funiculaires, d'après M. Poinsot

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 8 (1849), p. 68-74

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__68_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1849, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

SUR LES POLYGONES ET LES POLYÈDRES ÉTOILÉS, POLYGONES FUNICULAIRES;

D'APRÈS M. POINSOT.

1. Problème. Les n nombres naturels 1, 2, 3,..., n sont écrits en ordre autour de la circonférence d'un cercle; du point 1 on va au point p, de ce point à celui dont la place est marquée par $p+p-1$, de celui-ci à $p+2(p-1)$, de là à $p+3(p-1)$, et ainsi de suite: par combien de points aura-t-on passé quand on sera revenu à 1, et combien de fois aura-t-on fait le tour de la circonférence?

Solution. x et y désignant des nombres positifs entiers, on sera évidemment de retour en 1 lorsqu'on aura

$$p+x(p-1)=ny+1, \quad \text{d'où} \quad ny=(p-1)(x+1),$$

r et s étant les quotients respectifs de n et $p-1$ par leur plus grand commun diviseur; on a

$$ry=s(x+1), \quad \text{d'où} \quad y=s, \; x=r-1;$$

ainsi on passe par r points, le premier compris. Et en supposant que ce premier point aille successivement d'un point au suivant, il aura parcouru s fois la circonférence, en revenant à sa première position.

Corollaire. Si $p-1$ et n sont premiers entre eux, alors $r=n$, $s=p-1$; dans ce cas, on passe par tous les points, et le premier se mouvant parcourt $p-1$ fois la circonférence. Pour connaître son avant-dernière place, il faut faire $x=n-2$; substituant dans $p+x(p-1)$, il vient $np - n - p + 2$: ainsi l'avant-dernier point est $2 - p$ ou bien $n + 2 - p$; ce qui est évident à priori. Donc, allant de 1 à p ou bien en allant de 1 à $n + 2 - p$, et prenant toujours les points de p en p, on parcourt le même chemin, mais en sens opposé.

2. *Théorème*. Une circonférence étant divisée en n parties égales, et désignant les points de division par les nombres 1, 2, 3,..., n, le nombre $p - 1$ étant premier à n, si l'on joint par une corde le point 1 au point p, celui-ci au point $2p - 1$, celui-ci au point $3p - 2$, et ainsi de suite; après avoir parcouru $p - 1$ fois la circonférence, on revient au point 1, et on a un polygone *fermé* de n côtés égaux et de n angles égaux.

Ce théorème est une conséquence immédiate de ce qui précède.

Observation. Par *angle* de polygone, il faut entendre celui que forment deux côtés *consécutifs* décrits par le mouvement continu du point de départ 1; c'est l'angle qui renferme le centre du cercle. Lorsque $p = 2$, on obtient les polygones ordinaires; lorsque $p > 2$, on a les polygones *étoilés :* ainsi il existe donc autant de polygones, décrits dans les *deux sens,* qu'il existe de nombres plus petits que n et premiers à n, et la moitié de ce nombre, en ne prenant que les polygones différents; les polygones étoiles n'ont pas d'angles rentrants, mais sont coupés par une droite en plus de deux points. Lorsque les divisions de la circonférence sont égales, les polygones sont réguliers, c'est-à-dire ont les côtés égaux et les angles égaux; le polygone d'un nombre de côtés n, et formé en allant de 1 à p, est dit polygone de l'*espèce* $p - 1$.

Applications.

n	Nombres de polygones ou *espèces.*				
3	1,				
4	1,				
5	2, savoir : de	1 à 2,	1 à 3,		1^re^ et 2^e^ espèce ;
6	1,				
7	3,	1 à 2,	1 à 3,	1 à 4,	1^re^, 2^e^ et 3^e^ espèce ;
8	2,	1 à 2,	1 à 4,		1^re^ et 3^e^ espèce ;
9	3,	1 à 2,	1 à 3,	1 à 5,	1^re^, 2^e^ et 4^e^ espèce ;
10	2,	1 à 2,	1 à 4,		1^re^ et 3^e^ espèce.

3. *Théorème.* Même construction que dans le théorème précédent ; la somme des angles du polygone est égale à $\pi[n-2(p-1)]$.

Démonstration. Supposons toujours le polygone décrit par le point 1 d'un mouvement continu ; prolongeons chaque côté, dans le sens du mouvement. A chaque sommet on a un angle intérieur et un angle extérieur ; la somme de tous ces angles, intérieurs et extérieurs, est égale à $n\pi$. Le point 1 a décrit $p-1$ fois la circonférence ; donc la somme de tous les angles extérieurs seulement est égale à $2(p-1)\pi$: la somme des angles intérieurs est donc $\pi[n-2(p-1)]$.

Observation. Lorsque $p=2$, on a $\pi(n-2)$; c'est la règle connue.

Corollaire I. Lorsque $n=2(p-1)+1$, la somme des angles est égale, comme dans le triangle, à deux angles droits ; cela n'est donc possible que dans les polygones d'un nombre impair de côtés. Soit $n=2q+1$; il est évident que q est premier avec n. On peut donc faire $p=q+1$; donc, allant de 1 à $q+1$, on obtient un polygone dont la somme des angles est égale à deux droits : ainsi pour $n=5$, $q=2$. Dans l'espèce de 1 à 3, la somme des angles est égale à deux droits ; pour $n=7$, c'est l'espèce 1 à 4.

Corollaire. Si $n = 2(p+1)+2$, la somme des angles est égale, comme dans le quadrilatère, à quatre droits; il faut donc que n soit pair. Faisons $n = 2q$, d'où $q = p$; il faut donc que $q - 1$ et $2q$ soient premiers, ce qui exige que q soit pair Que l'on ait $n = 2^m q$; q est impair et $m > 1$.

Corollaire II. Dans un polygone régulier, l'angle au sommet est égal à $\frac{\pi}{n}[n - 2(p-1)]$.

4. Problème. Un fil fermé passe à travers n anneaux, entre lesquels il peut glisser; les anneaux sont tirés par des forces égales divisant l'espace angulaire en parties égales. Le fil, dans le cas de l'équilibre, formera un polygone régulier de n côtés de toute espèce: on demande la grandeur de la tension.

Solution. Représentons chaque force par l'unité; l'angle du polygone est $\frac{\pi}{n}[n - 2(p-1)]$, et la moitié de cet angle est $\frac{\pi}{2n}[n - 2(p-1)]$. Décomposant la force, suivant les côtés du polygone, on trouve facilement que la tension est égale à $\frac{1}{2}\,\text{séc}\,\frac{\pi}{2n}[n - 2(p-1)]$. La tension la plus forte répond à $p = 2$, c'est le polygone ordinaire; la moindre tension répond à $p = \frac{n-1}{2}$.

5. Nous avons supposé jusqu'ici, pour faciliter l'intelligence, que les n points sont situés sur une circonférence; mais il est évident que les mêmes conséquences subsistent pour des points distribués sur un plan d'une manière quelconque. Mais il peut arriver que tous les polygones aient des angles rentrans, angles plus grands que deux angles droits.

6. Menant une droite à travers un polygone de l'es-

pèce p, il est évident que le point 1, en parcourant $p-1$ fois la circonférence, rencontre cette droite $2(p-1)$ fois; donc une droite coupe les n côtés du polygone de l'espèce p en $2(p-1)$ points.

7. *Lemme.* Le nombre triangulaire $\frac{q(q+1)}{2}$ est premier avec $2q+1$, car le plus grand commun diviseur est le même qu'entre les quantités $q+1$ et $2q+1$, ou entre q et $q+1$; donc, etc.

8. Lemme. — *Théorème.* r étant premier avec $2q+1$, les $2q+1$ premiers termes de la progression arithmétique, ayant pour premier terme r, et pour raison $\frac{q(q+1)}{2}$, donnent, dans un ordre quelconque, pour résidus de la division des termes par $2q+1$, les nombres 1, 2, 3,..., $2q+1$, et le $2q+2^{\text{ième}}$ terme est r.

Démonstration. Pour que le résidu r reparaisse, il faut avoir, x et y étant entiers, la congruence

$$r+\frac{xq(q+1)}{2}=(2q+1)y+r,$$

d'où

$$\frac{xq(q+1)}{2}=(2q+1)y;$$

or $2q+1$ et $\frac{q(q+1)}{2}$ sont premiers entre eux; donc $y=\frac{q(q+1)}{2}$ et $x=2q+1$; donc r ne reparaît qu'en $2q+2^{\text{ième}}$ terme, et ainsi des autres. C. Q. F. D.

9. Problème. $2q+1$ points sont distribués dans l'espace; partant de l'un de ces points, décrire d'un mouvement continu les $q(2q+1)$ droites qu'on obtient en réunissant ces points deux à deux, et sans décrire deux fois la même droite.

Solution. Désignons les points par les nombres 1, 2, 3,..., $2q+1$, formons la série des nombres $\frac{n^2+n}{2}+1$, en donnant à n toutes les valeurs depuis 0 jusqu'à q: on aura la suite 1, 2, 4, 7, 10,..., $\frac{q(q+1)}{2}+1$. Ainsi on ira de 1 à 2; de 2 à 4; de 4 à 7,...; de $\frac{q(q-1)}{2}+1$ à $\frac{q(q+1)}{2}+1$; et tous ces nombres sont inégaux. A chaque terme de la première série on ajoute $\frac{q(q+1)}{2}$; on aura $\frac{q(q+1)}{2}+1$; $\frac{q(q+1)}{2}+2$,...; $q(q+1)+1$; on ira de $\frac{q(q+1)}{2}+1$ à $\frac{q(q+1)}{2}+2$, etc.; et les q lignes de cette seconde série sont différentes des q lignes de la première série. On ajoute encore $\frac{q(q+1)}{2}$ à chaque terme de cette deuxième série pour obtenir une troisième série donnant encore q lignes différentes des $2q$ lignes déjà obtenues. En continuant, on forme $2q+1$ séries, dont chacune fournit q lignes, et en tout $(2q+1)q$ lignes différentes; la $2q+2^{ième}$ série reproduit la première $(2q)$; donc les $q(2q+1)$ lignes sont décrites d'un mouvement continu.

Observation. On peut donc envelopper, avec un seul fil et sans duplicature, les côtés et toutes les diagonales d'un polygone d'un nombre impair de côtés, et les arêtes et toutes les diagonales d'un polyèdre d'un nombre impair de sommets. Il est donc possible de décrire d'un seul trait de plume les côtés et les diagonales d'un polygone d'un nombre impair de côtés.

10. Lorsque le nombre de points est pair, le problème précédent devient impossible. En effet, soient les points 1, 2, 3..., $2q$ en nombre pair: pour que le problème soit possible, il faut qu'on puisse écrire sur une seule ligne toutes les $q(2q-1)$ combinaisons binaires, de telle sorte que le nombre final d'une combinaison soit le nombre initial de la combinaison suivante, et que la ligne commence et finisse par le même nombre : chaque nombre, 1 par exemple, se trouve donc écrit un nombre pair de fois, ou, ce qui revient au même, il part un nombre pair de lignes du sommet 1, chose impossible lorsque le nombre de points est pair.

Ainsi il est impossible de décrire d'un seul trait les quatre côtés et les deux diagonales d'un quadrilatère.

La détermination du *nombre* de solutions possibles pour un nombre impair de points est un problème dont la solution est à désirer. Je l'ai proposé à plusieurs géomètres distingués, sans rien obtenir. Le jeu du domino présente une question de ce genre : de combien de manières peut-on placer sur une seule ligne tous les dominos, en observant la loi du jeu? On peut supposer qu'on ait mis les *doubles* de côté. (*La fin prochainement.*)