C. ADAMS

Lemmes sur les cercles inscrits à un triangle, et solution algébrique du problème de Malfatti

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 8 (1849), p. 62-63

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__62_1>

LEMMES

Sur les cercles inscrits à un triangle, et solution algébrique du problème de Malfatti;

PAR M. C. ADAMS,

Professeur à l'École industrielle de Winterthür (Suisse) [*].

1. Il est d'usage, dans les pays germaniques, que les programmes annuels contiennent toujours quelques Mémoires scientifiques, dus aux professeurs de l'établissement. C'est ainsi que le programme de l'École industrielle de Winterthür pour l'année 1848 renferme : 1° le problème de Malfatti, résolu algébriquement par M. C. Adams; 2° Rapport sur les études de 1847 à 1848. On voit, par ce Rapport, qu'on enseigne dans cet Institut *industriel*, les principaux théorèmes concernant les transversales, etc., tandis que dans nos institutions universitaires, dans nos colléges, ces mêmes théories, fondement de la géométrie moderne, sont enseignées quelquefois, mais comme œuvres surérogatoires non exigibles dans les examens, et, par conséquent, non apprises des élèves. Aussi, les découvertes géométriques de nos Poncelet, de nos Chasles, sont moins répandues en France qu'à l'étranger. Ceci soit dit en passant; quant à la solution de M. Adams, c'est la plus

(*) Programm der Gewerbschule in Winterthür für das Schuljahr 1848; in-4° de 26 pages, 1 planche. Winterthur, 1845.

complète que je sache, du célèbre problème. Publiée déjà en 1846, l'édition actuelle est plus générale et embrasse tous les cas. Le travail est précédé de douze lemmes, que nous nous bornerons à énoncer. La plupart sont connus et déjà consignés dans ce journal. Faisant usage de ce lemme, nous donnerons la solution plus tard.

II. *Notation*. ABC le triangle; $AB = c$; $BC = a$; $CA = b$;
$s = \frac{1}{2}$ périmètre; $s_1 = s - a$; $s_2 = s - b$; $s_3 = s - c$;
α, β, γ, distances du centre du cercle inscrit aux sommets A, B, C; r, rayon du cercle inscrit;
S, centre du cercle inscrit; S_1, S_2, S_3, centres des cercles ex-inscrits; O, point d'intersection des trois hauteurs;
r_1, r_2, r_3, rayons des cercles ex-inscrits S_1, S_2, S_3;
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, quantités analogues à s_1, s_2, s_3, mais par rapport au triangle $S_1S_2S_3$;
ρ_1, ρ_2, ρ_3, rayons des cercles ex-inscrits au triangle $S_1S_2S_3$; et ρ rayon du cercle inscrit;
R, rayon du cercle circonscrit au triangle ABC;
R_1, rayon du cercle inscrit au triangle formé avec les trois hauteurs du triangle ABC.

III. *Lemme*. 1. $rr_1 = s_2 s_3$; $rr_2 = s_1 s_3$; $rr_3 = s_1 s_2$;
2. $abc = a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2$;
3. $bcs_1 = \alpha^2 s$; $acs_2 = \beta^2 s$; $abs_3 = \gamma^2 s$;
4. $\beta\gamma s_1 = a\alpha r$; $\alpha\gamma s_2 = b\beta r$; $\alpha\beta s_3 = c\gamma r$;
5. $\alpha^2 s_2 s_3 = bcr^2$; $\beta^2 s_1 s_3 = acr^2$; $\gamma^2 s_1 s_2 = abr^2$;
6. $ab - (\gamma - \alpha)(\gamma - \beta) = 2\rho\rho_3$,
$ac - (\beta - \alpha)(\beta - \gamma) = 2r\rho_2$,
$bc - (\alpha - \beta)(\alpha - \gamma) = 2r_1\rho$;
7. $(\alpha + \beta)(\alpha + \gamma) - bc = 2\rho r$;
8. $AO + 2R = r_2 + r_3$;
9. $2RR_1 = s_1^2 - (2R - r_1)^2$;
10. $2RR_1 = s^2 - (2R + r)^2$;
11. $as_1 + bs_2 + as_3 = bs$;
12. $a^2(r_1 - r) = 4Rr^2$.