Nouvelles annales de mathématiques

J.-N. Lebon

Note sur les équations du premier degré

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 8 (1849), p. 59-60

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__59_0>

NOTE SUR LES ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ;

PAR M. J.-N. LEBON (*).

On démontre habituellement dans les cours ce théorème :

I. *Toutes les méthodes d'élimination appliquées à deux équations du premier degré à deux inconnues, conduisent au même résultat.* Et cela, en démontrant cet autre théorème :

II. *Deux équations du premier degré à deux inconnues n'admettent qu'un seul système de solutions.*

On peut néanmoins démontrer directement le premier, et en déduire, si l'on veut, le second. Voici comment :

Théorème I. La méthode des coefficients indéterminés comprend toutes les autres comme cas particuliers.

En effet, le système

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

peut être remplacé par le système équivalent

$$\begin{cases} max + mby = mc, \\ na'x + nb'y = nc'. \end{cases}$$

Mais si dans ces deux dernières équations, nous posons $n = 1$, $m = \frac{a'}{a}$, nous aurons pour système équivalent au premier,

$$\begin{cases} a'x + \frac{a'}{a}by = \frac{a'}{a}c \quad \text{ou} \quad a'x = \frac{a'}{a}c - \frac{a'}{a}by; \\ a'x + b'y = c', \end{cases}$$

à la seconde ajoutant en croix la première, et la combinant

(*) Nom anagrammatique.

avec la seconde, nous avons

$$\begin{cases} a'\left(\dfrac{c-by}{a}\right)+b'y=c', \\ a'x+b'y=c', \end{cases}$$

c'est-à-dire le système qu'on obtient immédiatement par la *méthode de substitution.*

Posons $m=\frac{1}{a}$, $n=\frac{1}{a'}$; nous aurons

$$\begin{cases} x+\dfrac{b}{a}y=\dfrac{c}{a}, & (1) \\ x+\dfrac{b'}{a'}y=\dfrac{c'}{a'}, & (2) \end{cases}$$

et, en retranchant l'une de l'autre,

$$\frac{b}{a}y-\frac{b'}{a'}y=\frac{c}{a}-\frac{c'}{a'} \quad \text{ou} \quad \frac{c'-b'y}{a'}=\frac{c-by}{a},$$

équation qui, jointe à l'équation (2) multipliée par a, donne le système qu'on obtient immédiatement par *voie de comparaison.*

Enfin, posons $n=b$, $m=b'$; il vient

$$\begin{aligned} b'ax+b'by&=b'c, \\ ba'x+bb'y&=c'b; \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$(ab'-ba')x=cb'-bc'.$$

En posant $n=a$ et $m=a'$, on serait arrivé à

$$(ab'-ba')y=ac'-ca',$$

équation qui, avec la précédente, donne le système qu'on obtient immédiatement par la méthode d'addition et de soustraction. Donc, etc. C. Q. F. D.

Théorème II. Deux équations du premier degré à deux inconnues ne peuvent être satisfaites que par un seul système de solutions