Nouvelles annales de mathématiques

J. Sornin

Recherche du nombre des chiffres que fournit à la période une fraction ordinaire réduite en fraction décimale

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 8 (1849), p. 50-57

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__50_1>

RECHERCHE

Du nombre des chiffres que fournit à la période une fraction ordinaire réduite en fraction décimale ;

PAR M. J. SORNIN,

Professeur de mathématiques au lycée de Reims.

On sait déterminer, en général, le nombre des chiffres que donne une fraction ordinaire réduite en décimales, quand le quotient a un nombre fini de chiffres ; on sait également déterminer le nombre des chiffres qui précèdent la période, quand le quotient est périodique mixte : nous nous proposons ici de déterminer le nombre des chiffres de la période, quand la fraction ne se convertit pas exactement en décimales.

Remarquons d'abord que, lorsqu'une fraction ordinaire donnera lieu à un quotient périodique mixte, on pourra facilement déduire de cette fraction celle qui donnerait lieu à la partie périodique simple ; il suffira pour cela de multiplier la fraction proposée par une puissance de 10 égale à la plus haute puissance de 2 ou de 5 qui entre dans le dénominateur.

Nous n'avons donc à nous occuper que des fractions qui donnent lieu à un quotient périodique simple, c'est-à-dire dont le dénominateur ne contient aucun des facteurs 2 ou 5.

Le dénominateur des fractions que nous considérons ne pouvant être terminé ni par un chiffre pair, ni par un 5, sera de l'une des formes

$$10k+1, \quad 10k+3, \quad 10k+7, \quad 10k+9.$$

D'ailleurs la forme $10k+9$ est la même que $10k-1$; et la forme $10k+7$ est la même que $10k-3$.

On peut donc dire que le dénominateur sera de l'une ou de l'autre des formes

$$10k\pm 1, \quad 10k\pm 3.$$

Soit, en général, $\frac{C}{D}$ la fraction irréductible que l'on veut convertir en décimales, en désignant par *abcd*... la période, m le nombre de ses chiffres: on aura

$$\frac{C}{D}=\frac{abcd\ldots}{10^m-1}, \quad \text{d'où} \quad abcd\ldots=\frac{C(10^m-1)}{D};$$

ce qui montre que D doit diviser 10^m-1, quel que soit C, et le nombre des chiffres de la période sera la plus petite valeur de m qui rendra 10^m-1 divisible par D.

On conclut d'abord de là ce théorème, que *le nombre des chiffres de la période d'une fraction irréductible est le même, quel que soit son numérateur.*

Nous considérons donc seulement ici la fraction $\frac{1}{D}$.

Nous examinerons successivement les différentes formes sous lesquelles D peut se présenter.

I. $$D=10k+1.$$

Soit $$x=\frac{10^m-1}{10k+1}.$$

Posons $x=10y-1$; il viendra

$$10^m-1=(10y-1)(10k+1).$$

Réduisant, on en tire

$$y = \frac{10^{m-1} + k}{10k + 1}.$$

Faisons de nouveau $y = 10z + k$; on aura

$$10^{m-1} + k = (10z + k)(10k + 1);$$

d'où

$$z = \frac{10^{m-2} - k^2}{10k + 1}.$$

Soit encore $z = 10u - k^2$, et un calcul semblable donnera

$$u = \frac{10^{m-3} + k^3}{10k + 1}.$$

On posera $u = 10t + k^3$, et ainsi de suite.

Comme il est facile de suivre la loi des valeurs de y, z, etc., on en conclura que l'on arrivera nécessairement à l'égalité

$$v = \frac{10^{m-m} + k^m}{10k + 1} = \frac{1 + k^m}{10k + 1} \quad \text{si } m \text{ est impair};$$

ou à

$$v = \frac{10^{m-m} - k^m}{10k + 1} = \frac{1 - k^m}{10k + 1} \quad \text{si } m \text{ est pair.}$$

Si v est entier, en remontant de proche en proche on verra aisément que x sera entier. Or je dis que la réciproque est également vraie. En effet, si x est entier, ou bien y sera entier, ou bien il ne contiendra en dénominateur que 2 ou 5; c'est ce qui résulte de l'égalité $x = 10y - 1$.

En raisonnant de même sur l'égalité suivante, on verra que si y n'était pas entier, z contiendrait au dénominateur les facteurs 2 ou 5, et ne pourrait d'ailleurs contenir que ces facteurs. En continuant ce raisonnement, on arriverait à conclure que v contiendrait en dénominateur les seuls facteurs 2 ou 5: mais v, d'après la valeur à laquelle on est parvenu, ne peut contenir en dénominateur ni 2 ni 5 : donc y, z, ..., v sont entiers. Ainsi toute valeur de m qui rend x entier rend aussi v entier, et réciproquement. Donc la plus petite valeur de m qui rendra v entier sera le nombre des chiffres de la période.

En prenant $k^m - 1$ au lieu de $1 - k^m$, qui est négatif, on est conduit à la règle suivante :

« Former les différentes puissances des dizaines du dénominateur, augmenter de 1 les puissances impaires, diminuer de 1 les puissances paires ; et le premier résultat, qui est divisible par le dénominateur donné, correspond à une puissance égale au nombre de chiffres de la période. »

Exemples.

1°. $D = 11$, $k = 1$.

Les puissances impaires de 1, augmentées de 1, donnent 2 qui n'est pas divisible par 11 ; il ne peut donc y avoir qu'un nombre pair de chiffres à la période. D'ailleurs la deuxième puissance, c'est-à-dire la première puissance paire, diminuée de 1, donne zéro, nombre divisible par 11 ; donc il il y a deux chiffres à la période.

2°. $D = 21$, $k = 2$.

On formera le tableau suivant :

Puissances de 2	:	2,	4,	8,	16,	32,	64,	128...
— impaires + 1	:	3,		9,		33,		129,
— paires — 1	:		3,		15,		63.	

Le premier nombre divisible par 21 est 63, qui correspond à la sixième puissance de 2 ; il y aura donc six chiffres à la période.

3°. $D = 111$, $k = 11$.

Puissances de 11	:	11,	121,	1331...
— impaires + 1	:	12,		1332,
— paires — 1	:		122....	

1332 étant le premier nombre divisible par 111, on conclut que la période a trois chiffres.

II. $$D = 10k - 1.$$

x étant le quotient $\frac{10^m - 1}{10k - 1}$, posons $x = 10y + 1$; d'où

$$y = \frac{10^{m-1} - k}{10k - 1}.$$

Puis $y = 10z + h$, ce qui donne

$$z = \frac{10^{m-2} - k^2}{10k - 1}, \text{ etc.}$$

La loi étant facile à suivre, on arrivera, que m soit pair pair ou impair, à l'égalité

$$v = \frac{1 - k^m}{10k - 1},$$

et l'on montrera, comme dans le premier paragraphe, que la plus petite valeur de m qui rendra v entier déterminera le nombre des chiffres de la période.

En prenant $k^m - 1$ au lieu de $1 - k^m$, on a donc la règle suivante :

« Former les puissances de k; la première qui, diminuée de 1, donne un résultat divisible par le dénominateur donné, fait connaître le nombre des chiffres de la période. »

Exemples.

1°. $$D = 9, \quad k = 1.$$

Comme la première puissance de 1, diminuée de 1, donne zéro, on conclut qu'il n'y aura qu'un chiffre périodique.

2°. $$D = 39, \quad k = 4.$$

Puissances de 4 : 4, 16, 64, 256, 1024, 4096....
— dimin. de 1 : 3, 15, 63, 255, 1023, 4095....

4095 étant le premier de ces nombres divisible par 39, et 4095 correspondant à la sixième puissance de 4, on conclut que la période a six chiffres.

III. $$D = 10k \pm 3.$$

En multipliant D par 3, il devient de la forme $10k \pm 1$.

Considérons, au lieu de la fraction $\frac{1}{D}$, la fraction $\frac{1}{3D}$: on pourra déterminer le nombre des chiffres de la période fournie par cette dernière. Or nous allons faire voir qu'en multipliant une fraction par un nombre entier, le produit étant encore une fraction, on ne peut que diminuer le nombre des chiffres de la période sans pouvoir l'augmenter; d'où nous conclurons que la fraction $\frac{1}{D}$, qui est égale à $\frac{1}{3D} \times 3$, ne peut avoir plus de chiffres périodiques que $\frac{1}{3D}$. On aura donc ainsi une limite maximum du nombre cherché. Pour prouver le théorème énoncé, considérons la fraction $\frac{a}{b}$ qui a m chiffres à la période; p étant cette période, on aura

$$\frac{a}{b} = \frac{p}{10^m} + \frac{p}{10^{2m}} + \ldots = \frac{p}{10^m - 1},$$

d'où

$$\frac{ra}{b} = \frac{rp}{10^m} + \frac{rp}{10^{2m}} + \ldots = \frac{rp}{10^m - 1},$$

ra étant $< b$, rp est $< 10^m$; ce qui montre que $\frac{ra}{b}$, quel que soit le nombre entier r, peut être converti en fraction périodique de m chiffres, ce qui est le théorème qu'il fallait démontrer. Ce théorème était d'ailleurs prouvé avec une plus grande extension dans le cas où r est premier avec b, car nous avons vu que $\frac{C}{D}$ avait le même nombre de chiffres périodiques que $\frac{1}{D}$. On le restreint ici; car dans le cas qui nous occupe, r a, au contraire, un facteur commun avec D, et nous n'avons ainsi qu'une limite maximum.

On peut cependant chercher si $\frac{ra}{b}$ aura moins de chiffres que $\frac{a}{b}$ par la méthode suivante :

Supposons que la période de $\frac{a}{b}$ puisse se décomposer en plusieurs autres quand on la multiplie par r; la nouvelle période ayant m' chiffres, m' sera un diviseur de m, et l'on aura

$$\frac{rp}{10^m - 1} = \frac{p'}{10^{m'} - 1} \text{ (p' étant cette nouvelle période)},$$

$$p' = \frac{rp(10^{m'} - 1)}{10^m - 1}.$$

Il faut donc déterminer la plus petite valeur de m' qui rend p' entier; ce qui sera facile quand p et m seront connus par la réduction de $\frac{a}{b}$ en décimales

Exemples.

1°. $\quad D = 3, \quad 3D = 9.$

Il ne peut pas y avoir plus d'un chiffre à la période, il y en aura donc un.

2°. $\quad D = 13, \quad 3D = 39.$

Il ne peut pas y avoir plus de six chiffres à la période. Pour chercher s'il peut y en avoir moins, prenons $\frac{1}{39} = 0,025641025641\ldots$ et appliquons la méthode précédente; on aura

$$p = 25641, \quad m = 6, \quad r = 3.$$

Il faut donc que $\frac{3.25641(10^{m'}-1)}{999999}$ soit entier, ou, en simplifiant, que $\frac{2839(10^{m'}-1)}{37037}$ soit entier.

$37037 = 7.11.13.37$, et 2839 n'est divisible par aucun de ces nombres; il faut donc que $10^{m'}-1$ le soit. Posons $10^{m'}-1 = 37037.Q$.

Le premier membre étant terminé par un 9, Q doit être terminé par un 7; on posera donc $Q = 10Q' - 3$, et il vient

$$10^{m'} - 1 = 370370Q' - 111111;$$

d'où

$$Q' = \frac{10^{m'-1} + 11111}{37037}.$$

Q' ne peut être égal ni à 0, ni à 1, ni à 2; car $37037.Q'$ doit être terminé par un 1. La plus simple valeur de Q' sera donc $Q' = 3$. On a alors, si cette valeur convient,

$$3 = \frac{10^{m'-1} + 11111}{37037};$$

d'où l'on déduit

$$10^{m'-1} = 100000, \quad m' - 1 = 5, \quad m' = 6$$

Il n'y a donc pas moins de six chiffres à la période.

3°. $\qquad D = 7, \quad 3D = 21.$

La période ne peut pas avoir plus de six chiffres; on verrait, par un calcul semblable au précédent, qu'elle en a, en effet, six.

4°. $\qquad D = 37, \quad 3D = 111.$

La période ne peut pas avoir plus de trois chiffres, et l'on verrait, en effet, qu'elle en a trois.