H. EMERY

Solution de la question 191

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 8 (1849), p. 45-46

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__45_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 191

(t. VII, p 368).

PAR M. H. ÉMERY,

Élève du lycée de Versailles.

Trouver la $n^{ième}$ dérivée de $x^n(x-1)^n$, et démontrer que cette dérivée, égalée à zéro, a n racines réelles comprises entre o et 1.

I. L'équation $x^n(x-1)^n = 0$, ayant toutes ses racines réelles, savoir : n racines égales à zéro et n égales à l'unité, il suit du théorème de Rolle que toutes les racines des dérivées sont aussi réelles et comprises entre o et 1 ; mais la $n^{ième}$ dérivée est la première qui n'ait aucune racine, soit nulle, soit égale à l'unité.

Recherche de la dérivée.

II. — *Première méthode.* On a, par le développement binomial,

$$x^n(x-1)^n = x^{2n} - \frac{[n]}{[n-1]}x^{2n-1} + \frac{[n]}{[2][n-1]}x^{2n-2} - \ldots + (-1)x^n$$

où les crochets indiquent un produit continuel.

Prenant la dérivée $n^{ième}$ de chaque terme, on a pour la dérivée $n^{ième}$ cherchée :

$$\frac{d^n[x(x-1)]^n}{dx^n} = [2n]x^n - \frac{[n]}{[n-1]}\frac{[2n-1]}{[n-1]}x^{n-1}$$
$$+ \frac{[n]}{[2][n-2]}\frac{[2n-2]}{[n-2]}x^{n-2} - \ldots + (-1)^n[n].$$

III. — *Lemme.* F et φ étant des fonctions de x, on obtient la $n^{ième}$ dérivée du produit $F\varphi$ en faisant le développement binomial de $(F+\varphi)^n$, mais en prenant les exposants comme des indices de dérivation, et écrivant pour premier terme $\varphi F^{(n)}$, et pour dernier terme $F\varphi^{(n)}$.

Démonstration. On a, pour

Première dérivée, $\varphi F' + F\varphi'$;
Deuxième dérivée, $\varphi F'' + 2F'\varphi' + F\varphi''$;
Troisième dérivée, $\varphi F''' + 3\varphi' F'' + 3\varphi'' F' + F\varphi'''$;

et, par induction, la dérivée d'indice p sera

$$\varphi F^{(p)} + p.\varphi' F^{(p-1)} + \frac{p.p-1}{1.2}\varphi'' F'^{(p-2)} + \ldots + F\varphi^{(p)}.$$

Prenant la dérivée de ce développement, on obtient une même loi de formation pour la dérivée suivante d'indice $p+1$; donc cette loi est générale.

IV. — *Deuxième méthode.* Faisons $\varphi = x^n$, $F = (x-1)^n$; on aura, en appliquant le lemme et divisant le résultat égalé à zéro par $[n]$,

$$[x-1]^n + n^2 x[x-1]^{n-1} + \left[\frac{n.n-1}{1.2}\right]^2 x^2(x-1)^{n-1}$$
$$+ \left[\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\right]^3 x^3(x-1)^{n-2} + \ldots + x^n = 0.$$

Cette équation n'a évidemment aucune racine négative; car prenant x négatif, tous les termes sont positifs, n étant pair, et tous les termes sont négatifs, n étant impair, et x ne peut surpasser l'unité : donc, comme on l'a vu à priori, toutes les racines sont comprises entre 0 et 1.