NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

PAUL SERRET

Démonstration du théorème de M. Steiner sur les coniques inscrites à un triangle

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 8 (1849), p. 453-458

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__453_0>

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE M. STEINER SUR LES CONIQUES INSCRITES A UN TRIANGLE;

PAR M. PAUL SERRET,
Élève de l'École Normale.

1. *Lemme.* Le lieu des centres des coniques tangentes à trois droites données, et dont la somme (algébrique) des carrés des axes est constante, est un cercle ayant pour centre le point de rencontre des hauteurs du triangle formé par les trois tangentes.

Démonstration. Prenons pour axe des y l'une des hauteurs BO du triangle ABC formé par les trois tangentes, et pour axe des x le côté opposé AC; posons

$$\text{OA} = a, \quad \text{OC} = a', \quad \text{OB} = b,$$

et que la conique soit représentée par l'équation ordinaire à six termes. Adoptant la notation des *identités* de M. Terquem, on aura, pour exprimer que la droite $dy + ex + f = 0$, est tangente à la conique, la relation suivante :

$$(\text{T}) \qquad l'd^2 - den + le^2 + mf^2 + 2dfk' + 2ef.k = 0.$$

$$(\text{D}) \qquad dy + ex + f = 0.$$

Exprimons que la relation fondamentale a lieu pour chacun des côtés du triangle ABC,

$$(1) \qquad \text{AC}, \quad y = 0; \ (d = 1, \ e = 0, \ f = 0);$$

$$(2) \ \text{AB}, \quad ay + bx - ab = 0; \ (d = a, \ e = b, \ f = -ab);$$

$$(3) \ \text{BC}, \quad a'y + bx - a'b = 0; \ (d = a', \ e = b, \ f = -a'b).$$

L'équation de condition (T) appliquée à AC, donne tout d'abord la condition

$$(\text{I}) \qquad l' = 0.$$

Introduisant immédiatement ce résultat dans (T), on peut écrire cette équation sous cette forme :

$$(\mathrm{T}') \qquad 2de \cdot \frac{n}{m} - e^2 \cdot \frac{l}{m} = 2df \cdot \frac{k'}{m} + 2ef \cdot \frac{k}{m} + f^2.$$

Appliquant à AB et BC cette nouvelle forme de l'équation de condition, nous arrivons aux équations suivantes :

$$2ab \cdot \frac{n}{m} - b^2 \cdot \frac{l}{m} = -2a^2 b \cdot \frac{k'}{m} - 2ab^2 \frac{k}{m} + a^2 b^2,$$

et

$$2a'b \cdot \frac{n}{m} - b^2 \cdot \frac{l}{m} = -2a'^2 b \cdot \frac{k'}{m} - 2a'b^2 \frac{k}{m} + a'^2 b^2,$$

ou bien

$$(\mathrm{II}) \qquad 2a \cdot \frac{n}{m} - b \cdot \frac{l}{m} = a \left(ab - 2a \frac{k'}{m} - 2b \frac{k}{m}\right),$$

et

$$(\mathrm{III}) \qquad 2a' \cdot \frac{n}{m} - b \cdot \frac{l}{m} = a' \left(a'b - 2a' \frac{k'}{m} - 2b \frac{k}{m}\right).$$

Les équations (I), (II) et (III) que nous venons d'obtenir, expriment que la conique proposée est tangente aux trois côtés du triangle, représentés par les équations (1), (2) et (3).

Exprimons maintenant la deuxième condition, à savoir que la somme des carrés des axes de la conique est égale à une quantité connue H^2 ; il vient

$$\mathrm{H}^2 = + \frac{4m\mathrm{NL}}{m^3} = + \frac{4.\mathrm{NL}}{m^2} \qquad \text{(t. I, p. 493).}$$

Or ici les axes étant rectangulaires, on a

$$\mathrm{N} = \mathrm{A} + \mathrm{C};$$

d'ailleurs, on sait que

$$\mathrm{A} \times 4\mathrm{L} = k^2 - ml,$$

que

$$C \times 4L = k'^2 - ml' = k'^2,$$

à cause de $l' = 0$.

Donc, la deuxième condition est exprimée par cette équation :

$$H^2 = + \frac{k^2 + k'^2 - ml}{m^2} = + \left[\left(\frac{k}{m}\right)^2 + \left(\frac{k'}{m}\right)^2 - \frac{l}{m}\right],$$

ou

$$\text{(IV)} \qquad \left(\frac{k}{m}\right)^2 + \left(\frac{k'}{m}\right)^2 - \frac{l}{m} (-) H^2 = 0.$$

Des équations (I) et (II) tirant la valeur du rapport $\frac{l}{m}$, pour la substituer ensuite dans l'équation (IV), on obtient successivement

$$\frac{l}{m} = \frac{aa'\left(b - 2\frac{k'}{m}\right)}{b},$$

et

$$\text{(IV')} \qquad \left(\frac{k}{m}\right)^2 + \left(\frac{k'}{m}\right)^2 + 2\frac{aa'}{b} \cdot \frac{k'}{m} - H^2 - aa' = 0,$$

ou bien, remplaçant enfin $\frac{k}{m}$, $\frac{k'}{m}$ par x, y coordonnées du centre de la courbe, il viendra, pour le lieu cherché des centres,

$$\text{(V)} \qquad x^2 + y^2 + 2\frac{aa'}{b} \cdot y - H^2 - aa' = 0;$$

équation d'un cercle ayant son centre situé sur l'axe des y, l'une des hauteurs du triangle considéré. Donc, ce centre est le point de rencontre des trois hauteurs, comme on peut d'ailleurs le vérifier facilement; car on a pour l'ordonnée β du centre,

$$(a) \qquad \beta = -\frac{aa'}{b},$$

et, pour son rayon,

$$(b) \qquad \mathrm{R}^2 = \delta^2 + aa' + \mathrm{H}^2.$$

On peut mettre la valeur du carré du rayon sous une autre forme équivalente plus simple. Soit I le point de rencontre des hauteurs, et BIO l'une des hauteurs. On aura, d'après l'équation (b),

$$\mathrm{R}^2 = \overline{\mathrm{IO}}^2 + \mathrm{OA}\,.\,\mathrm{OC} + \mathrm{H}^2,$$

OA, OC étant d'ailleurs de mêmes signes ou de signes contraires, suivant que, etc.; mais on voit facilement que OA . OC $= -$ OB . OI; donc

$$\mathrm{R}^2 = \mathrm{H}^2 + \mathrm{OI}(\mathrm{OI} - \mathrm{OB}) = \mathrm{H}^2 + \mathrm{OI}.\mathrm{IB};$$

ainsi donc,

$$(b') \qquad \mathrm{R}^2 = \mathrm{H}^2 + \mathrm{OI}.\mathrm{IB},$$

le produit OI . IB étant d'ailleurs positif ou négatif, suivant que le triangle ABC est *obtusangle* ou *non*.

On pourrait tirer de la formule (b') plusieurs conséquences, que je passe sous silence.

2. Théorème de M. Steiner. *On peut inscrire ou ex-inscrire à un triangle six coniques égales à une conique donnée; leurs centres appartiennent à une même circonférence de cercle ayant pour centre le point de rencontre des hauteurs du triangle.*

Démonstration. La même que ci-dessus, page 453.

Observation. On pourrait peut-être démontrer directement et géométriquement la formule (b').

3. Théorème *Par le centre* I *d'une ellipse, menons un diamètre indéfini quelconque* BIO; *menons à la courbe une tangente* COA *perpendiculaire à ce diamètre, et le rencontrant en* O; *puis, sur le prolongement de* OI, *prenons le point* B *tel, que l'on ait en valeur absolue* IO . IB $= a^2 + b^2$ (*a et b étant les demi-*

axes de la courbe) ; *du point* B *ainsi déterminé, menons deux tangentes* BA, BC *à la courbe. Le point de rencontre des hauteurs du triangle circonscrit à la courbe, et formé par les trois tangentes* AC, BC, BA, *sera le centre même* I *de la courbe.*

N. B. Le cas où l'ellipse devient un cercle, se vérifie immédiatement. Le triangle circonscrit est alors le triangle équilatéral.

Démonstration. Si le point de rencontre des hauteurs du triangle ABC n'est pas le point I, ce sera un autre point tel que I′ situé sur le diamètre BIO, et l'on aura alors, d'après la formule (b'), et en prenant les produits de lignes en valeur absolue :

$$\overline{\mathrm{II'}}^2 = r^2 = a^2 + b^2 - \mathrm{OI'}.\mathrm{BI'};$$

mais déjà, par construction, on a

$$\mathrm{IO}.\mathrm{IB} = a^2 + b^2;$$

il viendra donc

$$\overline{\mathrm{II'}}^2 = r^2 = \mathrm{IO}.\mathrm{IB} - \mathrm{I'O}.\mathrm{I'B}.$$

Posons

$$\mathrm{IO} = \alpha, \quad \mathrm{IB} = \beta;$$

d'où, à cause de

$$\mathrm{II'} = r, \quad \mathrm{I'O} = \alpha + r, \quad \mathrm{I'B} = \beta - r,$$

il viendrait donc

$$r^2 = \alpha\beta - (\alpha + r)(\beta - r) = r^2 + (\alpha - \beta)r,$$

ou, enfin,

$$(a) \qquad (\alpha - \beta)r = 0$$

Or, on a toujours, d'après notre construction,

$$\alpha = \mathrm{IO} < \beta = \mathrm{IB}.$$

Car,

$$IO < a \quad \text{ou} \quad IO < \sqrt{a^2 + b^2};$$

et comme $IO . IB = a^2 + b^2$,

$$IB > \sqrt{a^2 + b^2};$$

donc on a toujours $IB > IO$; et la relation (a) devient

$$(a') \qquad r = II' = 0.$$

Ainsi le point I' coïncide avec le centre I de l'ellipse, qui est bien le point de rencontre des hauteurs. C. Q. F. D.

4. La formule (b') permet de résoudre ce problème : *Circonscrire à une ellipse donnée un triangle dont le point de rencontre des trois hauteurs soit donné.*