G.-J. DOSTOR

Rotation d'un corps autour d'un point fixe, lieu de l'axe du couple des forces centrifuges, lorsque le corps n'est sollicité par aucune force accélératrice

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 8 (1849), p. 408-412

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__408_1>

ROTATION D'UN CORPS AUTOUR D'UN POINT FIXE.

Lieu de l'axe du couple des forces centrifuges, lorsque le corps n'est sollicité par aucune force accélératrice;

Par M. G.-J. DOSTOR,
Docteur ès sciences mathematiques.

M. Poinsot, dans sa *Théorie nouvelle de la rotation des corps,* détermine le mouvement de l'axe du couple d'impulsion et celui de l'axe du couple des quantités de mouvement. Chacun de ces axes décrit un cône du second degré, dont la représentation donne une idée claire de la rotation du corps.

L'axe du couple des forces centrifuges décrit aussi un cône, mais qui est du quatrième degré. M. Poinsot n'en parle pas dans son Mémoire, et M. Briot n'en fait aucune mention dans les démonstrations qu'il a données des principaux théorèmes énoncés dans ce Mémoire. Cependant le mouvement de cet axe appartient à celui du corps. Nous croyons donc utile de remplir cette lacune, en donnant le calcul du cône des forces centrifuges.

Représentons, avec M. *Briot*, par p, q, r les composantes autour des axes principaux du corps de sa vitesse angulaire, et désignons par A, B, C ses trois moments d'inertie principaux.

Lorsque le corps n'est sollicité par aucune force accélératrice, son mouvement est déterminé par le système

$$(1)\qquad \begin{cases} C\dfrac{dr}{dt} + (B - A)\,qp = 0, \\[2mm] B\dfrac{dq}{dt} + (A - C)\,pr = 0, \\[2mm] A\dfrac{dp}{dt} + (C - B)\,rq = 0; \end{cases}$$

et les équations

$$(2)\qquad \begin{cases} (B - A)\,px - (C - B)\,rz = 0, \\ (B - A)\,qy - (A - C)\,rz = 0 \end{cases}$$

fixent à chaque instant la position de l'axe du couple des forces centrifuges.

Pour trouver le lieu de cet axe pendant le mouvement, il suffit d'éliminer entre (1) et (2) les variables p, q, r.

Dans ce but, multiplions les équations (1) par les quantités respectives Cr, Bq, Ap, puis par r, q, p, et faisons chaque fois la somme des résultats; nous trouvons, après avoir intégré,

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = k^2,$$
$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h.$$

L'élimination de p, q, r, entre les deux équations (2) et ces deux dernières, donne ensuite

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{A(A-u)(B-C)^2}{x^2}+\frac{B(B-u)(C-A)^2}{y^2} \\ &+\frac{C(C-u)(A-B)^2}{z^2}=0, \end{aligned}\right.$$

pour l'équation de la surface décrite par l'axe du couple des forces centrifuges, dans laquelle $\frac{k^2}{h}=\frac{1}{\delta}=\omega$. Donc :

Le lieu de l'axe du couple des forces centrifuges dans l'intérieur du corps est un cône du quatrième degré.

Dans la discussion de cette surface, supposons

$$A>B>C.$$

Il y a deux cas à distinguer, suivant que

$$\frac{1}{\sqrt{B}}>\delta>\frac{1}{\sqrt{A}};\quad \text{ou que}\quad \frac{1}{\sqrt{C}}>\delta>\frac{1}{\sqrt{B}}.$$

1°. Lorsque 2δ est compris entre l'axe moyen et l'axe minimum de l'ellipsoïde central, de sorte que $A>u>B$, l'équation (3) prend la forme

$$(4)\qquad \frac{a}{x^2}-\frac{b}{y^2}-\frac{c}{z^2}=0,$$

dans laquelle a, b, c désignent la valeur absolue des coefficients des trois termes.

2°. Lorsque 2δ est compris entre l'axe moyen et l'axe maximum, ou que $B>u>C$, l'équation (3) devient

$$\frac{a}{x^2}+\frac{b}{y^2}-\frac{c}{z^2}=0,$$

qu'on rend identique avec la précédente par le changement de $\frac{a}{x^2}$ en $\frac{c}{z^2}$, et réciproquement.

Il suffit donc de discuter l'équation (4).

La section faite dans la surface par un plan perpendiculaire à l'axe des z, est déterminée par

$$\frac{a}{x^2} - \frac{b}{y^2} = \frac{c}{\gamma}:$$

c'est une courbe du quatrième degré, symétrique par rapport aux deux axes coordonnés, présentant un point multiple à l'origine, et renfermée entre deux asymptotes parallèles à l'axe des y, dont les équations sont

$$x = \pm \gamma \sqrt{\frac{a}{c}}.$$

La section perpendiculaire à l'axe des y et située à la distance $y = \beta$ de l'origine est de même une courbe du quatrième degré, symétrique par rapport à ses deux axes, et comprise entre deux asymptotes parallèles à l'axe des xz déterminées par les équations $x = \pm \beta \sqrt{\frac{a}{b}}$.

Enfin, le cône, étant coupé par un plan perpendiculaire à l'axe des x, présente une section entièrement différente des précédentes, dont l'équation est

$$\frac{b}{y^2} + \frac{c}{z^2} = \frac{a}{\alpha}.$$

Cette courbe, du quatrième degré, a un point isolé à l'origine; elle est munie de quatre asymptotes, deux à deux parallèles aux axes et équidistantes deux à deux de l'origine. Leurs équations sont

$$y = \pm \alpha \sqrt{\frac{b}{a}}, \quad z = \pm \alpha \sqrt{\frac{c}{a}}.$$

La section présente donc quatre branches, situées dans les angles qui se trouvent formés par les asymptotes, et tournent leur convexité vers les sommets de ces angles.

De ce qui précède, il résulte que :

Le lieu de l'axe du couple des forces centrifuges est une surface du quatrième degré, composée de quatre cônes, partant du centre fixe, leur sommet commun, et s'étendant dans les quatre angles dièdres formés autour de l'axe des x, en s'appuyant sur les deux autres axes par leurs arêtes extrêmes.

On peut consulter, pour l'étude complète du mouvement de rotation d'un corps solide autour d'un point fixe, le *Traité de Mécanique* de POISSON, 2e édition, 1833, tome II, page 121; SAINT-GUILHEM : *Théorie nouvelle de rotation des corps*, insérée dans le *Journal* de M. LIOUVILLE, 1836; et avant tout, le savant Mémoire qui termine les *Éléments de Statique* de M. POINSOT, que ce géomètre, auteur de cette belle théorie, a présenté à l'Académie, le 19 mai 1834, et dont M. BRIOT a démontré les principaux résultats dans une thèse, qui fut publiée en 1842 dans le *Journal de Mathématiques*.