Solution de la question de géométrie proposée en mathématiques élémentaires, au concours général de 1849

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 8 (1849), p. 401-408

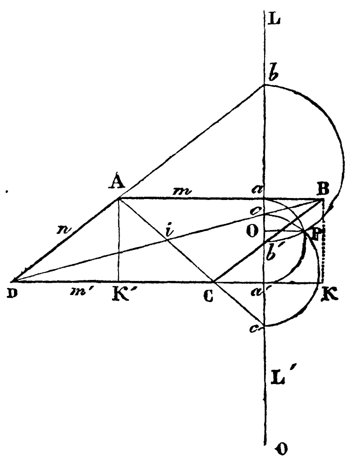
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__401_0>

SOLUTION

De la question de géométrie proposée en mathématiques élémentaires, au concours général de 1849 ;

Par M. S.

Il s'agit de prouver que, *si une droite* LL', *perpendiculaire à deux côtés opposés d'un parallélogramme, rencontre ces deux côtés en deux points a, a', les deux autres côtés en deux points b, b', et les deux diagonales en deux points c, c', les circonférences de cercle décrites sur les trois segments aa', bb', cc', comme diamètres, se couperont toutes trois aux mêmes points.*



Première démonstration. On voit immédiatement que la question revient à prouver qu'il existe sur la droite LL' un point O tel, que les trois produits $Oa.Oa'$, $Ob.Ob$

et $Oc.Oc'$ sont égaux entre eux. Sous cette forme, la question est réduite à une simple vérification qui ne présente aucune difficulté. Il suffit d'exprimer cinq des segments Oa, Oa', etc., en fonction du sixième, considéré comme inconnu, et de voir si une valeur de ce sixième segment peut satisfaire à la fois aux deux équations

$$Oa.Oa' = Ob.Ob' = Oc.Oc'.$$

Prenons Oa' pour le segment inconnu, et désignons-le par x.

Appelons m et n les deux côtés DC, DA du parallélogramme; D l'angle qu'ils comprennent, et l la distance Da' de la transversale LL' au point D. Ces quatre quantités m, n, D et l constituent les données de la question : les trois premières déterminent, de forme et de grandeur, le parallélogramme, et la quatrième fixe la position de la droite LL' perpendiculaire aux côtés AB, CD.

Prenons le point O, hypothétiquement, au-dessous du point c' pour que tous les segments Oa, Oa', etc., soient de même signe; on aura

$$Oa = Oa' + a'a = x + aa' = x + n \sin D,$$

$$Ob = Oa' + a'b = x + Da'.\operatorname{tang} D = x + l \operatorname{tang} D = x + l.\frac{\sin D}{\cos D},$$

$$Ob' = Oa' + a'b' = x + Ca'.\operatorname{tang} D = x + (l - m).\frac{\sin D}{\cos D},$$

$$Oc = Oa' + a'c = x + a'c.$$

Or BK étant perpendiculaire sur DC, on a, dans les deux triangles semblables BDK, cDa',

$$a'c = \frac{BK}{DK}\, Da' = l.\frac{n.\sin D}{m + n \cos D}.$$

Donc

$$Oc = x + \frac{l.n.\sin D}{m + n \cos D}.$$

Et pareillement,

$$Oc' = Oa' - a'c' = x - \frac{AK'}{CK'}\,Ca' = x - (l - m)\,\frac{n \sin D}{m - n \cos D}.$$

D'après ces expressions des six segments, on a

$$Oa.Oa' = x^2 + x.n \sin D,$$

$$Ob.Ob' = x^2 + x.\frac{\sin D}{\cos D}(2l - m) + l(l - m)\frac{\sin^2 D}{\cos^2 D},$$

$$Oc.Oc' = x^2 + x.n.\sin D\,\frac{m^2 - (2l - m)n \cos D}{m^2 - n^2 \cos^2 D} - \frac{l(l - m)n^2 \sin^2 D}{m^2 - n^2 \cos^2 D}.$$

Egalant les expressions des deux produits $Oa.Oa'$ et $Ob.Ob'$, on a

$$x.n.\sin D = x\frac{\sin D}{\cos D}(2l - m) + l(l - m)\frac{\sin^2 D}{\cos^2 D}.$$

D'où l'on tire cette valeur de x,

$$x = \frac{l(l - m)\dfrac{\sin D}{\cos D}}{n \cos D - (2l - m)}.$$

L'équation

$$Oa.Oa' = Oc.Oc',$$

ou

$$x.n.\sin D = x.n.\sin D\,\frac{m^2 - (2l - m)n \cos D}{m^2 - n^2 \cos^2 D} - \frac{l(l - m)n^2 \sin^2 D}{m^2 - n^2 \cos^2 D},$$

ou, en divisant par $n \sin D$,

$$x\left[1 - \frac{m^2 - (2l - m)n \cos D}{m^2 - n^2 \cos^2 D}\right] = -\frac{l(l - m)n \sin D}{m^2 - n^2 \cos^2 D},$$

donne

$$x = \frac{l(l - m)\dfrac{\sin D}{\cos D}}{n \cos D - (2l - m)};$$

c'est la même valeur que précédemment. Donc cette expression détermine la position d'un point O qui satisfait aux conditions

$$Oa \, . \, Oa' = Ob \, . \, Ob' = Oc \, . \, Oc'.$$

Le théorème est donc démontré.

Observation. Ce mode de démonstration s'applique au cas où la transversale LL' est supposée inclinée sur le côté CD; mais les expressions des segments que l'on a à calculer sont un peu moins simples par ce qu'elles se calculent dans des triangles obliques, au lieu de triangles rectangles, et qu'il y entre le sinus de l'inclinaison de la droite LL'.

Deuxième démonstration. La notion du rapport anharmonique fournit une démonstration très-simple du théorème. On sait que l'on appelle *rapport anharmonique* de quatre points a, b, c, d situés en ligne droite, une fonction de quatre segments compris entre ces points, telle que $\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd}$; et *rapport anharmonique* de quatre droites A, B, C, D concourantes en un même point, une fonction des sinus de quatre angles compris entre ces droites, telle que $\frac{\sin(A, C)}{\sin(A, D)} : \frac{\sin(B, C)}{\sin(B, D)}$.

La propriété du rapport anharmonique, dont nous allons nous servir, est celle-ci :

Théorème. *Quand quatre droites* A, B, C, D, *concourantes en un même point, sont rencontrées par une transversale quelconque, en quatre points a, b, c, d, le rapport anharmonique de ces quatre points est égal à celui des quatre droites.* C'est-à-dire que l'on a

$$\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} = \frac{\sin(A, C)}{\sin(A, D)} : \frac{\sin(B, C)}{\sin(B, D)}.$$

Corollaire. Il suit de là que : *Quand quatre droites* A, B, C, D *concourent en un même point, deux transversales quelconques les rencontrent en deux séries de* *quatre points dont les rapports anharmoniques sont égaux.*

Cela posé : soit i le point de rencontre des deux diagonales du parallélogramme. Considérons sur la diagonale DB les quatre points B, c, i, D : le faisceau formé par les quatre droites menées du sommet A à ces quatre points, et le faisceau de quatre droites menées du sommet opposé C aux mêmes points, ont leurs rapports anharmoniques égaux à celui de ces quatre points, et, par conséquent, égaux entre eux ; il s'ensuit, d'après le corollaire ci-dessus, que ces deux faisceaux de quatre droites rencontrent la transversale LL' en deux séries de quatre points a, c, c', b et b', c, c', a', qui ont le même rapport anharmonique. Par conséquent, si d'un point P, pris arbitrairement, on mène à ces points deux séries de quatre droites que j'appelle A, C, C', B et B', C, C', A', elles formeront deux faisceaux ayant le même rapport anharmonique. De sorte qu'on aura

$$\frac{\sin(A, C)}{\sin(A, B)} : \frac{\sin(C', C)}{\sin(C', B)} = \frac{\sin(B', C)}{\sin(B', A')} : \frac{\sin(C', C)}{\sin(C', A')}.$$

Prenons pour le point P l'un des points d'intersection des circonférences de cercle décrites sur les deux segments aa', bb' comme diamètres ; les deux droites A, A' seront rectangulaires, ainsi que les deux droites B, B'. Il s'ensuit que angle (A, B) = angle (A', B'), et que l'égalité précédente se réduit à

$$\frac{\sin(A, C)}{\sin(B', C)} = \frac{\sin(A', C')}{\sin(B, C')};$$

ou, en désignant par B'' le prolongement de la droite B au delà du point P,

$$\frac{\sin(C, A)}{\sin(C, B')} = \frac{\sin(C', A')}{\sin(C', B'')}$$

Or l'angle (A, B') est égal à l'angle (A', B''); l'équation prouve donc que les deux droites C, C' sont placées *semblablement*, dans ces deux angles; c'est-à-dire que ces deux droites sont également inclinées sur les deux droites A et A' respectivement; d'où il suit qu'elles sont rectangulaires, de même que ces deux-là, et, par conséquent, que la circonférence décrite sur le segment cc', comme diamètre, passe par le point P. C. Q. F. D.

Observation. Nous n'avons pas tenu compte de la forme particulière du quadrilatère, c'est-à-dire du parallélisme de ses côtés opposés; de sorte que la démonstration doit s'entendre d'un quadrilatère quelconque. Ainsi le théorème est vrai pour tout quadrilatère coupé par une transversale.

Troisième démonstration. Nous nous proposons de prouver qu'il existe sur la droite LL' un point O satisfaisant aux équations

$$(a)\qquad \left\{\begin{array}{l} Oa.Oa' = Ob.Ob', \\ Ob.Ob' = Oc.Oc', \\ Oc.Oc' = Oa.Oa'. \end{array}\right.$$

La première équation s'écrit

$$\frac{Oa}{Ob} = \frac{Ob'}{Oa'};$$

d'où

$$\frac{Oa}{Ob - Oa} = \frac{Ob'}{Oa' - Ob'};$$

ou

$$\frac{Oa}{Ob'} = \frac{ab}{b'a'}.$$

On tire, de même, de la deuxième équation,

$$\frac{Ob'}{Oc'} = \frac{b'c}{c'b};$$

et de la troisième,

$$\frac{Oc'}{Oa} = \frac{c'a'}{ac}.$$

Multipliant ces trois équations membre à membre, on a une équation dont le premier membre est égal à l'unité, et qui se réduit à

$$(b) \qquad ab.b'c.c'a' = b'a'.ac.c'b.$$

Cette équation exprime une relation entre les six points a, a', etc., liés entre eux par les équations (a). Réciproquement, quand six points ont entre eux la relation (b), il existe un point O qui satisfait aux équations (a); car les cinq premiers points a, a', b, b' et c étant donnés, on peut en trouver un sixième c'' tel, que l'on ait, à l'égard du point O déterminé par l'équation

$$Oa.Oa' = Ob.Ob',$$

les deux autres équations

$$Ob.Ob' = Oc.Oc'', \quad \text{et} \quad Oc.Oc'' = Oa.Oa.$$

Mais il vient d'être démontré que ces trois équations comportent celle-ci,

$$ab.b'c.c''a' = b'a'.ac.c''b.$$

Et puisque, par hypothèse, on a l'équation (b), on conclut de là que

$$\frac{c''a'}{c''b} = \frac{c'a'}{c'b}.$$

Ce qui prouve que le point c'' se confond avec le point c'. Donc si l'équation (b) a lieu entre les six points a, a', b, b' et c, c', il existera un point O qui satisfera aux équations (a). Or l'équation (b) a lieu; car nous avons vu, dans la démonstration précédente, que les quatre points a, c, c', b ont leur rapport anharmonique égal à celui des quatre b', c, c', a' ; de sorte qu'on a

$$\frac{ac}{ab} : \frac{c'c}{c'b} = \frac{b'c}{b'a'} : \frac{c'c}{c'a'},$$

ou

$$ac.c'b.b'a' = ab.b'c.c'a'.$$

Ce qui est l'équation (b). Donc les équations (a) ont lieu. C. Q. F. D.

Observation. Nous n'avons fait aucune hypothèse sur la forme du quadrilatère; de sorte que la démonstration et les propositions qu'elle comporte, relativement aux équations (a) et (b), et aux circonférences décrites sur les trois segments aa', bb', cc', s'entendent d'un quadrilatère quelconque coupé par une transversale menée arbitrairement.