Nouvelles annales de mathématiques

Lebesgue

Note sur l'article relatif à la plus courte distance de deux droites, et sur un théorème de M. Dupin

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 8 (1849), p. 381-383

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__381_1>

NOTE

Sur l'article relatif à la plus courte distance de deux droites, et sur un théorème de M. Dupin

(voir t VIII, p 236),

PAR M. LEBESGUE.

La formule (c), page 240, est due à M. Joachimsthal, qui l'a donnée dans le paragraphe VI de son Mémoire sur les lignes les plus courtes, et sur les lignes de courbure des surfaces du second degré. Cet intéressant Mémoire se trouve dans le tome XXVI du *Journal* de M. Crelle. J'avais eu le tort de ne pas le lire d'un bout à l'autre. La belle formule de M. Joachimsthal facilite bien des démonstrations. Je prendrai pour exemple le remarquable théorème de M. Dupin : « Trois surfaces qui se coupent deux à deux orthogonalement en tous les points des intersections, se coupent suivant des lignes de courbure. » (*Développements de Géométrie*, p. 333; 1813.)

Voici la démonstration même de M. Dupin, mais abrégée au moyen de la formule en question.

Soient

$$(1) \qquad X dx + Y dy + Z dz = 0,$$
$$(2) \qquad X_1 dx + Y_1 dy + Z_1 dz = 0,$$
$$(3) \qquad X_2 dx + Y_2 dy + Z_2 dz = 0$$

trois surfaces; la condition de perpendicularité est exprimée par les équations

$$(a) \qquad \begin{cases} XX_1 + YY_1 + ZZ_1 = 0, \\ X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2 = 0, \\ X_2X_1 + Y_2Y_1 + Z_2Z_1 = 0; \end{cases}$$

et pour que cela ait lieu en tous les points de l'intersection, il faut poser, en différentiant,

$$(b) \begin{cases} (X dX_1 + Y dY_1 + Z dZ_1) + (X_1 dX + Y_1 dY + Z dZ) = 0, \\ (X_1 dX_2 + Y_1 dY_2 + Z_1 dZ_2) + (X_2 dX_1 + Y_2 dY_1 + Z_2 dZ_1) = 0, \\ (X_2 dX + Y_2 dY + Z_2 dZ) + (X dX_2 + Y dY_2 + Z dZ_2) = 0. \end{cases}$$

Mais remarquons que les équations (1) donnent

$$(c) \qquad \begin{cases} dX dx + dY dy + dZ dz = 0, \\ dX_1 dx + dY_1 dy + dZ_1 dz = 0, \\ dX_2 dx + dY_2 dy + dZ_2 dz = 0. \end{cases}$$

De plus, l'intersection des surfaces (2) et (3) étant perpendiculaire à la surface (1), la tangente à l'intersection sera normale à la surface; de là résulte que les cosinus $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ seront proportionnels aux cosinus

$$X : \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}, \quad Y : \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}, \quad Z : \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

ou dx, dy, dz proportionnels à X, Y, Z. Ainsi l'on aura, d'après les équations (*c*),

$$(d) \qquad \begin{cases} X dX_1 + Y dY_1 + Z dZ_1 = 0, \\ X dX_2 + Y dY_2 + Z dZ_2 = 0. \end{cases}$$

On doit conclure de là que les équations (*b*) se partagent :

la première donne

$$(e) \qquad X_1 dX + Y_1 dY + Z_1 dZ = 0$$

avec l'une des équations (d).

Mais comme des équations

$$X_1 dx + Y_1 dy + Z_1 dz = 0, \quad X_1 X + Y_1 Y + Z_1 Z = 0$$

on tire

$$\frac{X_1}{Y dz - Z dy} = \frac{Y_1}{Z dx - X dz} = \frac{Z_1}{X dy - Y dx},$$

l'équation (e) devient

$$dX(Y dz - Z dy) + dY(Z dx - X dz) + dZ(X dy - Y dx) = 0,$$

ou bien

$$dx(Y dZ - Z dY) + dy(Z dX - X dZ) + dz(X dY - Y dX) = 0;$$

c'est-à-dire l'équation (1) des lignes de courbure.