LEMOINE

Deuxième solution du théorème 178

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 8 (1849), p. 379-381

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__379_1>

DEUXIÈME SOLUTION DU THÉORÈME 178

(voir t. VII, p. 144).

PAR M. LEMOINE,
Professeur à Nantes.

Par le foyer d'une ellipse on mène deux cordes rectangulaires, dans le cercle décrit sur le grand axe comme diamètre; les deux cordes sont égales à deux diamètres conjugués de l'ellipse. Et si l'on mène par le centre, dans le cercle, un diamètre parallèle à l'une des cordes, il est partagé par l'autre corde en deux segments égaux aux rayons vecteurs qui vont du foyer aux extrémités d'un des diamètres conjugués dans l'ellipse. (STEINER.)

La solution donnée par M. Janfroid est fort élégante; la suivante semble plus directe.

Si par un point situé à l'intérieur d'un cercle on mène deux cordes perpendiculaires entre elles, la somme de leurs carrés est constamment égale à $8R^2 - 4h^2$, R étant le rayon, h la distance du point au centre. Donc, dans le cas de l'énoncé,

$$l^2 + l'^2 = 8a^2 - 4(a^2 - b^2) = 4a^2 + b^2 = (2a)^2 + (2b)^2.$$

Les deux cordes sont en conséquence égales à deux diamètres conjugués de l'ellipse, si elles sont comprises entre ses deux axes. Or, l étant $> l'$, on a $l < 2a$; par suite, la relation elle-même donne $l' < 2b$. Donc le premier point est démontré.

L'équation polaire de l'ellipse est

$$\rho = \frac{p}{1 + \frac{c}{a}\cos\omega},$$

celle du cercle sera

$$\rho^2 + 2c\rho\cos\omega - b^2 = 0.$$

Comme les racines de cette dernière équation, qui répondent à toute valeur donnée de ω, sont de signes contraires, leurs valeurs absolues répondent l'une à ω, l'autre à $\omega + \pi$. Donc

$$l = \rho + \rho' = 2\sqrt{c^2\cos^2\omega + b^2}.$$

Soient x et y les coordonnées de l'une des extrémités du diamètre égal à l dans l'ellipse rapportée à ses axes. Il viendra

$$\frac{l^2}{4} = c^2\cos^2\omega + b^2 = y^2 + x^2 = b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2} + x^2 = b^2 + \frac{c^2}{a^2}x^2,$$

d'où

$$x = \pm a\cos\omega, \qquad x = \pm a\cos\omega$$

Mais si l'on mène par le centre un diamètre sous l'angle ω avec l'axe focal, il sera perpendiculaire à la corde l', il la coupera donc à une distance du centre égale à $c \cos \omega$. Les deux parties du diamètre, dans le cercle, seront donc

$$a - c \cos \omega \quad \text{et} \quad a + c \cos \omega.$$

D'autre part, les deux rayons vecteurs menés du foyer aux extrémités du diamètre dans l'ellipse, seront

$$\delta = a - \frac{cx}{a} = a - c \cos \omega,$$

$$\delta' = a + \frac{cx}{a} = a + c \cos \omega.$$

Ce sont bien les mêmes valeurs.