Questions sur la numération et sur le plus grand commun diviseur

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 8 (1849), p. 358-362

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__358_0>

QUESTIONS SUR LA NUMÉRATION (*) ET SUR LE PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR.

1. *Lemme.* $\frac{1-x}{1-x-x^2}$ développé, par les méthodes connues, suivant les puissances ascendantes de x, donne la série récurrente

$$1+2x+3x^2+5x^3+8x^4+13x^5+\ldots;$$

l'échelle de relation est $(1,1)$; le terme général est

$$\frac{1}{4\sqrt{5}}\left(\frac{x}{2}\right)^{n-1}\left[(1+\sqrt{5})^{n+1}-(1-\sqrt{5})^{n+1}\right];$$

on a

$$4\sin 18^\circ = -1+\sqrt{5}.$$

2. *Question.* Faisant, dans la série précédente, $x=1$, combien y a-t-il de termes qui ont le même nombre donné de chiffres?

Réponse. Concevons la série partagée en groupes de nombres de *un* chiffre, de *deux* chiffres, de *trois* chiffres chacun, et ainsi de suite. Supposons qu'un de ces groupes commence par les deux nombres suivants 10^m+A_1. 2.10^m+A_2; A_1 et A_2 étant chacun moindre que 10^m; le premier chiffre à droite de 10^m+A_1 est 1, et ce même premier chiffre est 2 dans le nombre 2.10^m+A_2; d'après la loi de formation, les cinq nombres suivants sont :

$$3.10^m+A_1+A_2,\ 5.10^m+A_1+2A_2,\ 8.10^m+2A_1+3A_2,$$
$$13.10^m+3A_1+5A_2,\ 21.10^m+5A_1+8A_2;$$

(*) *Traité d'Arithmétique;* par M. J. Bertrand, p. 7 et 64; 1849.

il y a donc *au moins* cinq nombres de $m+1$ chiffres, et le sixième est de $m+2$ chiffres, et commence aussi à droite par 1, tandis que le suivant commence par 2; or ceci existe dans le premier groupe, où $m=0$; donc aussi dans tous les groupes suivants. Si A_1+A_2 est égal ou supérieur à 10^m, le troisième nombre sera 4.10^m+B_1, et ensuite $6.10^m+B_1+A_2$, $1^{m+1}+2B_1+A_2,\ldots$; alors le groupe de $m+1$ chiffres ne renfermera que *quatre* termes. Ainsi, il y a au *plus cinq termes* qui ont le même nombre de chiffres, et *quatre termes* au moins; tels sont. 1597, 2584, 4181, 6765, 10946.

3. *Question*. Combien le $n^{ième}$ nombre de la série a-t-il de chiffres?

Réponse. En mettant la valeur de n dans le terme général donné ci-dessus, on trouve la valeur de ce terme, et, par conséquent, le nombre de ses chiffres; mais il y a un moyen plus simple. On a

$$\log 2\sin 18^\circ = \log.\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \bar{1},791012;$$

donc

$$\log\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 0,208988; \quad \log\sqrt{5} = 0,349485,$$

$$(n+1)\log\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \log\sqrt{5} = n.0,208988 + \bar{1},859503 = A;$$

la valeur de n fait connaître la caractéristique du logarithme, et, par conséquent, le nombre des chiffres, à *une unité près;* car la seconde partie du terme général, quoique fractionnaire, et allant sans cesse en décroissant, peut augmenter d'une unité le nombre entier de la première partie.

Les logarithmes de la première partie du terme général croissent suivant une progression arithmétique dont la raison est, 0,068491.

4. *Question*. Un terme de la série étant donné, trouver son quantième.

Réponse. D'après le terme général, il faudrait résoudre une équation exponentielle. Soit p le nombre des chiffres du nombre donné; il appartient au groupe d'ordre p (2); si chaque groupe contenait *cinq termes*, le quantième du nombre serait un des nombres consécutifs de $5p - 4$ jusqu'à $5p$: ainsi $5p$ èst la limite supérieure du quantième n, et l'on voit de même que $4p$ est la limite inférieure. En substituant donc, dans le terme général, pour n tous les nombres entiers de $4p$ à $5p$, on trouvera la valeur de n qui correspond au nombre donné.

Autrement. Soit N le nombre donné; on pose $\log N = A$ (*voir* 3); d'où $n = \frac{-010497 + \log N}{0,208985}$, division facile, puisqu'on ne prend que la partie entière.

5. *Lemme*. Tous les nombres de la série (1) sont premiers entre eux.

Corollaire. En cherchant le plus grand commun diviseur (*) de deux nombres consécutifs, le nombre d'opérations qu'il faut faire, avant de parvenir au résidu *zéro*, est marqué par le quantième du petit nombre, et ce quantième a pour limite supérieure *cinq* fois le nombre des chiffres du petit nombre (4).

6. *Lemme*. Le rapport géométrique de deux nombres compris entre deux nombres consécutifs de la série, est compris entre 1 et 2.

7. N_1, N_2, N_3 étant trois nombres consécutifs de la série, si deux nombres sont compris entre N_2 et N_3, leur différence est moindre que N_1; car cette différence est moindre que $N_3 - N_2 = N_1$.

(*) Pourquoi ne pas appeler ce nombre *simplificateur*, d'après son usage le plus fréquent? on dit bien le *multiplicateur*.

8. THÉORÈME. *Dans la recherche du plus grand commun diviseur de deux nombres, cinq fois le nombre des chiffres du petit nombre est une limite supérieure du nombre d'opérations à faire avant de parvenir au résidu zéro.*

Démonstration. Soit P le plus petit des deux nombres, et R le premier résidu; supposons P compris entre N_2, N_3, termes consécutifs de la série; si $\frac{P}{R}$ est supérieur à 2, R sera moindre que N_2 (6); si $\frac{P}{R}$ est moindre que 2, R peut aussi être compris entre N_2 et N_3; mais alors le résidu suivant $P-R$ est moindre que N_1 (7); ainsi, le nombre d'opérations ne peut surpasser celui qu'il faudrait faire s'il s'agissait de N_3 et N_2; donc, etc.

Remarque. C'est M. Lamé qui a découvert cette limite ingénieuse (*voir* tome IV; Finck, 71; Lionnet, p. 617). Pourquoi le judicieux auteur du *Traité d'Arithmétique* n'a-t-il pas saisi cette occasion de faire connaître à ses jeunes lecteurs le nom d'un Français si célèbre dans l'Europe savante? Cette répugnance invincible qu'on remarque chez les géomètres français pour toute citation de noms propres, pourrait figurer comme *onomatophobie* dans une nosographie du système mental. Cette étrange aberration produit quelquefois des résultats fort singuliers. Ainsi, ce qui caractérise particulièrement l'École Polytechnique, c'est la haute importance qu'on y attache, et avec raison, à l'enseignement de la géométrie descriptive. Eh bien! je suis sorti de cette École sans avoir jamais entendu prononcer le nom du Lyonnais Desargues, créateur de la théorie stéréométrique, et j'en dois la première connaissance à l'ouvrage de M. Poncelet, mon illustre compatriote. Un demi-siècle s'est écoulé, et toujours même négligence de l'histoire de la science. Cette ignorance du passé contribue, avec d'autres causes, à entretenir le vice radical de notre époque, l'orgueil; c'est bien là le démon dont l'Évangile parle sous le nom de *légion* (saint Marc, ch. V, v. 9). En effet, ce vice unique engendre, recrute une légion de vices. Ce qui explique, soit dit en passant, comment on rencontre aujourd'hui tant d'hommes se croyant aptes, non à donner des lois à la société, à la gouverner, ce serait de leur part pure modestie, mais à la transformer complétement dans son essence, à créer même une nouvelle société de toutes pièces, subitement; toutefois, Dieu même a mis six jours à son œuvre : mythe sublime, qui nous enseigne que l'élément de toute création durable, c'est le temps. Déjà les Grecs disaient, dans un langage spirituel, *le temps ne respecte pas ce qu'on fait sans lui.* En France, nous faisons tout *sans lui;* aussi voyez comme cela dure! Sur toutes nos institutions, constitutions, on peut inscrire d'avance la célèbre épitaphe de Malherbe pour une jeune fille.