Questions sur la numération

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 8 (1849), p. 354-357
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__354_0>

QUESTIONS SUR LA NUMÉRATION (*).

1. PROBLÈME. *Trouver la somme des n premiers termes de la série dont le terme général est na^n; a étant un nombre quelconque.*

Solution. Soit

$$S_{n+2} = a + 2a^2 + 3a^3 + \ldots\ldots (n+1)a^{n+1},$$

$$S_{n+1} = a + 2a + 3a^2 + \ldots + na^n,$$

d'où

$$S_{n+2} - S_{n+1} = (n+1)a^{n+1}.$$

Faisons

$$S_{n+1} = a^{n+1}(n\varphi a + \psi a) + C;$$

$\varphi(a)$ et $\psi(a)$ sont des fonctions à déterminer, et C une constante arbitraire; on aura

$$S_{n+2} = a^{n+2}[(n+1)\varphi(a) + \psi a] + C;$$

d'où

$$S_{n+2} - S_{n+1}$$
$$= a^{n+1}[n(a-1)\varphi a + a\varphi(a) + (a-1)\psi(a)] = a^{n+1}(n+1).$$

On doit donc avoir

$$(a-1)\varphi a = 1; \qquad a\varphi(a) + (a-1)\psi a = 1;$$

on en tire

$$\varphi(a) = \frac{1}{a-1}, \quad \psi(a) = \frac{-1}{(a-1)^2};$$

donc

$$S_{n+1} = \frac{a^{n+1}[n(a-1)-1]}{(a-1)^2} + C.$$

(*) *Arithmétique* de M. J. Bertrand.

Supposons que pour $n = 0$, on ait

$$S_1 = 0,$$

alors

$$C = \frac{a}{(a-1)^2};$$

donc

$$S_{n+1} = \frac{a^{n+1}[n(a-1)-1]+a}{(a-1)^2}.$$

Observation. La solution *directe* se trouve par les méthodes du calcul aux *différences finies*. (*Voir* le précieux *Traité de Calcul différentiel* de Lacroix, tome III, page 138, 2^e édition; 1819.)

L'éloge de cet académicien, homme de bien, qui a rendu des services éclatants à la science et à l'enseignement, n'a pas encore été prononcé. Il en est de même pour l'illustre Legendre. Il est vrai que ces noms ne sont pas mêlés à nos discordes civiles; mais la gloire de ces noms est une richesse nationale. Pourquoi les frustrer d'un honneur qu'ils ont si bien mérité? Ayant égard à des circonstances impérieuses, l'Académie, dérogeant à ses statuts, pourrait charger un de ses membres d'acquitter une dette non sujette à prescription, et d'autant plus exigible, plus sacrée, qu'aucune réclamation ne peut venir d'outre-tombe. Il est triste qu'un citoyen obscur ait besoin d'élever sa voix dans une cause qui devrait compter publiquement pour avocats les Biot, les Cauchy et les Lamé.

2. Problème. *Combien y a-t-il de chiffres dans la suite naturelle des nombres, depuis 1 jusqu'à $10^{n+1}-1$?*

Solution. Depuis 10^n jusqu'à $10^{n+1}-1$, on rencontre $10^{n+1}-10^n$ ou 9.10^n nombres de $n+1$ chiffres; et, par conséquent, $9(n+1)10^n = 9n.10^n + 9.10^n$ chiffres. Il faut *sommer* depuis $n = 0$; dans le problème précédent, faisant $a = 10$, on obtient

$$9S_{n+1} = \frac{10^{n+1}(9n-1)+10}{9},$$

$$9S.10^n = 10^{n+1} - 1,$$

$$9S_{n+1} - 9S.10^n = n.10^{n+1} + \frac{8.10^{n+1}+1}{9}$$

$$= (n+1)10^{n+1} - \frac{10^{n+1}-1}{9};$$

d'où l'on déduit cette règle :

Écrivez $n+1$ zéros à la droite du nombre $n+1$, et au-dessus de chaque zéro, écrivez l'unité; faites la soustraction; le reste est le nombre des chiffres cherché.

Exemple. Combien y a-t-il de chiffres depuis 1 jusqu'à 99999? Ici $n = 4$; écrivez 500000, retranchez 11111, et le reste 488889 est le nombre de chiffres demandé.

3. Problème. *Trouver le nombre des chiffres de la suite naturelle des nombres depuis* 1 *jusqu'au nombre quelconque* N.

Solution. N est compris entre 10^{n+1} et 10^{n+2}; soit donc $N = 10^{n+1} + k$. Le nombre de chiffres de 1 à $10^{n+1} - 1$ est $(n+1)\,10^{n+1} - \frac{10^{n+1}-1}{9}$ (problème précédent). Il existe $k+1$ nombres depuis 10^{n+1} jusqu'à $10^{n+1} + k$, chacun de $n+2$ chiffres; ainsi le nombre total des chiffres est

$$(n+1)\,10^{n+1} - \frac{10^{n+1}-1}{9} + (k+1)(n+2).$$

4. Problème. *Écrivant tous les nombres de la suite naturelle, de droite à gauche, à la suite les uns des autres, on demande le chiffre qui occupe un rang désigné.*

Solution. Supposons qu'on demande le chiffre 1849^{ième}

à partir de la gauche, cherchons le nombre auquel ce chiffre appartient; à cet effet il faut, dans l'expression $(n+1)\,10^{n+1}-\frac{10^{n+1}-1}{9}$, donner à n une valeur telle, que l'expression approche le plus possible de 1849 ; cette valeur est $n=1$: donc le nombre dont le chiffre cherché fait partie est compris entre 99 et 999. Le premier 9 à droite de 999, occupe le 189^{ième} rang à partir de la gauche; il faut donc encore compter 1660 chiffres. Le produit $(k+1)(n+2)$ ou $3(k+1)$ égal le plus possible à 1660, on a $k=552$; ce qui donne $3(k+1)=1659$. Ainsi, le chiffre cherché est le premier à gauche de 1553, c'est-à-dire 1.

5. *Autrement.* On a l'identité

$$\begin{gathered} n+(n-1)(a-1)+(n-2)a(a-1)+(n-3)a^2(a-1) \\ +(n-4)a^3(a-1)+\ldots+a^{n-2}(a-1)=1+a+a^2+\ldots a^{n-1}. \end{gathered}$$

Supposons qu'on demande tous les chiffres de la suite naturelle depuis 1 jusqu'à 99999. Si tous ces nombres avaient cinq chiffres, on aurait 5.99999 ou 500000 — 5 chiffres.

Les nombres d'un seul chiffre donnent de trop.	4.9	chiffres:
Les nombres de deux chiffres	$3.9.10$	
Les nombres de trois chiffres	$2.9.10^2$	
Les nombres de quatre chiffres	$1.9.10^3$	

On a donc de trop, sur 500000,

$$5+4.9+3.9.10+2.9.10^2+1.9.10^3=11111;$$

d'après l'identité, en faisant $n=5$ et $a=10$; donc le nombre de chiffres est $500000-11111=488889$, comme on trouve par la règle de ci-dessus.